https://t.me/MechSource

بسمه تعالی

نام جزوه: دینامیک ماشین

نام استاد: دکتر اسلامی

دانشگاه: صنعتی امیرکبیر

https://t.me/MechSource

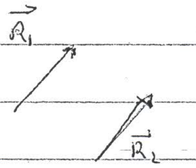
https://t.me/MechSource

Unit II

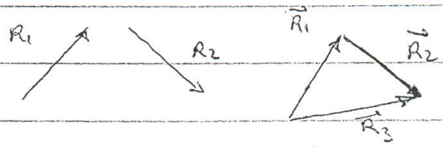
Velocity Analysis of Linkages

objective 1 : تعریف بردارها و خواص آن ها:

۱- دو بردار مساوی $\vec{R_1} = \vec{R_2}$

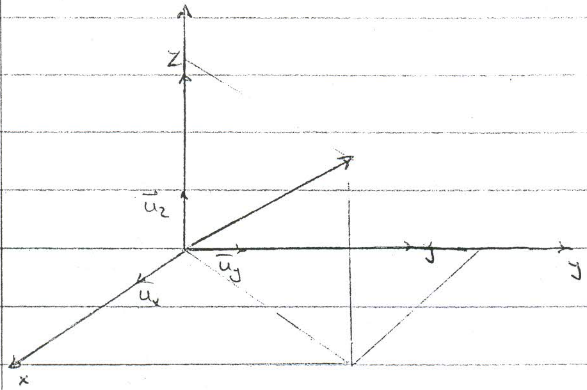


۲- جمع دو بردار



$\vec{R_1} + \vec{R_2} = \vec{R_3}$

۳- بردار برحسب مؤلفه‌ها:



$$\vec{R} = x\bar{u}_x + y\bar{u}_y + z\bar{u}_z$$

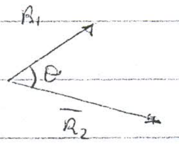
$$\bar{R} = r\bar{u}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\bar{U} = \frac{x}{r}\bar{u}_x + \frac{y}{r}\bar{u}_y + \frac{z}{r}\bar{u}_z$$

۴- حاصلضرب داخلی (Dot product)

$$R_1 . R_2 = R_1 R_2 \cos\theta$$



https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

۵- حاصلضرب خارجی (cross product)

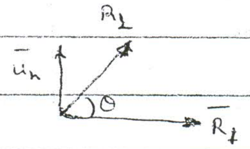
$$\vec{R}_1 \times \vec{R}_2 = \vec{R}_3$$

$$\bar{R}_1 \times \bar{R}_2 = \begin{vmatrix} \bar{u}_x & \bar{u}_y & \bar{u}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\bar{R}_1 = x_1\bar{u}_x + y_1\bar{u}_y + z_1\bar{u}_z$$

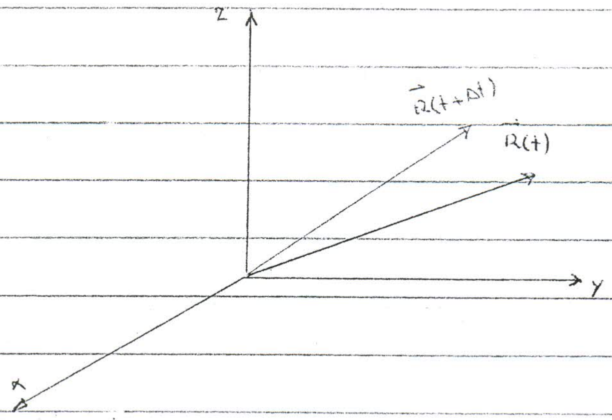
$$\bar{R}_2 = x_2\bar{u}_x + y_2\bar{u}_y + z_2\bar{u}_z$$

$$\bar{R}_1 \times \bar{R}_2 = R_1 R_2 \sin\theta \, \bar{u}_n$$



۶- مشتق یک بردار نسبت به زمان:

$$\vec{R} = \vec{R}(t) \Rightarrow \frac{d\vec{R}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{R}(t+\Delta t) - \vec{R}(t)}{\Delta t}$$



objective 2 تعیین سرعت یک ذره نسبت به متغیرهای مسیر:

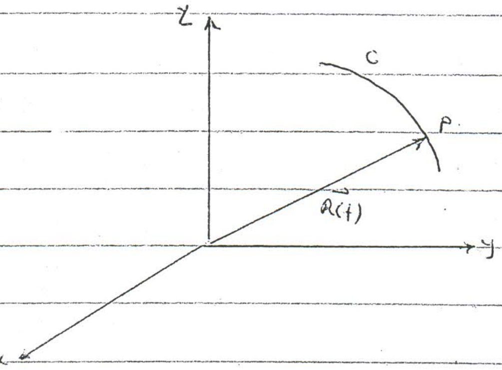
مشتق بردار مکان نسبت به زمان سرعت یا (velocity) است

2 بنابر تعریف velocity یک ذره متحرک در فضا عبارت است از مشتق position vector نسبت

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

بردار



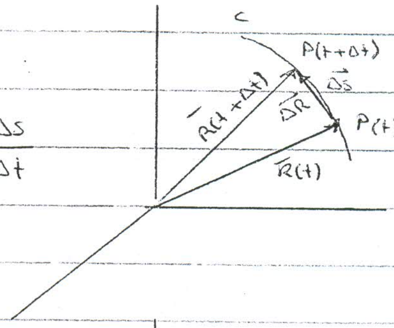
$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}\Big)_{xyz}$$

از سیستم کورهای کمکی برحسب متغیرهای مسیر (cordinate systems in term of path variable) زمانی استفاده می‌کنیم که یک ذره‌ی متحرک روی مسیری که معادله مسیر نسبت به کوردینات xyz معلوم باشد در حال حرکت است.

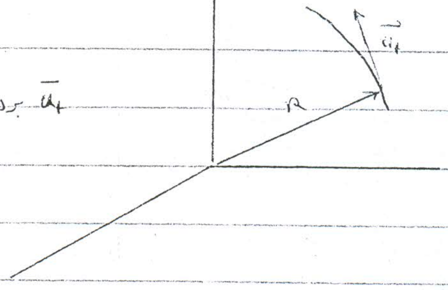
بنابه تعریف سرعت ذره‌ی P برابر است با $\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}\Big)_{xyz}$ یا برابر است با:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}\Big)_{xyz} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{R}(t+\Delta t) - R(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t} = \lim_{\substack{\Delta t \\ \Delta s}\to 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



$$= \frac{ds}{dt} \cdot \text{بردار واحد}$$



$\vec{u}_t$ بردار واحد مماس بر مسیر در جهت حرکت است

$$\boxed{\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{ds}{dt}\,\vec{u}_t}$$

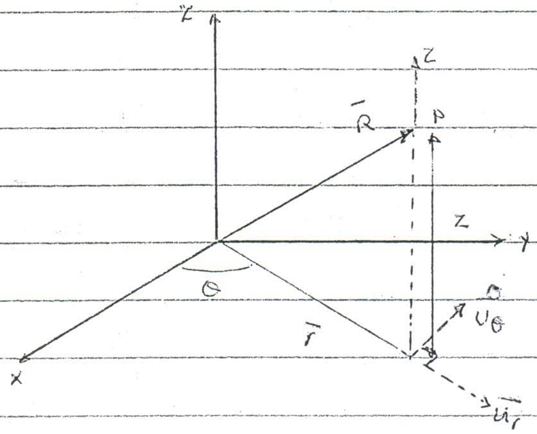
3

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

محور مختصات استوانه‌ای:

از این محور مختصات زمانی استفاده می‌کنیم که ذره‌ای روی مسیر دایره‌ای حرکت نماید و دارای حرکت دورانی باشد.



$$\vec{R} = \bar{r}\,\bar{u}_r + z\vec{u}_z$$

بنابر تعریف velocity ذره‌ی P برابر است با:

$0 < \theta < 2\pi$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{R}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\bar{r}\,\vec{u}_r + z\bar{u}_z\right) = \frac{d\bar{r}}{dt}\vec{u}_r + \bar{r}\frac{d\bar{u}_r}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z$$

$$+ z\frac{d\bar{u}_z}{dt}$$

از دینامیک:

$$\frac{d\bar{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\, d\theta$$

$$\frac{du_z}{dt} = 0$$

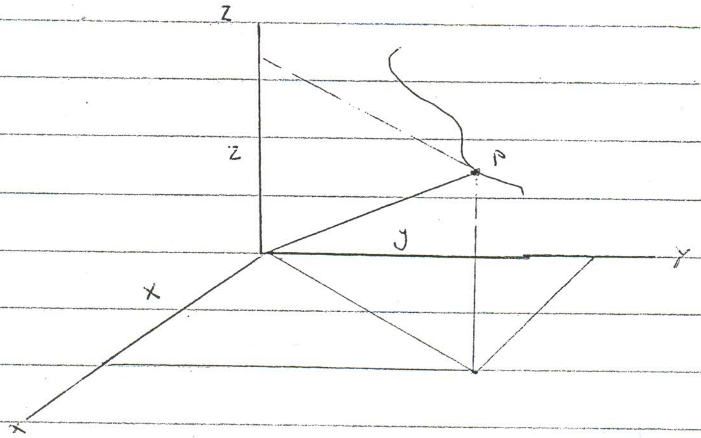
$$\boxed{\bar{v} = \dot{\bar{r}}\,\vec{u}_r + \bar{r}\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{u}_z}$$

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

Part III : سرعت در مختصات xyz

سیستم در مختصات xyz مفروض است :



$$\bar{R} = x\bar{u}_x + y\bar{u}_y + z\bar{u}_z \Rightarrow V = \frac{dR}{dt} = \dot{x}\bar{u}_x + \dot{y}\bar{u}_y + \dot{z}\bar{u}_z$$

objective 3 : کاربرد اعداد مختلط :

یک عدد مختلط را به شکل زیر نمایش داده می شود : $R = re^{j\theta}$

r = magnitute

θ = argument

$j = \sqrt{-1}$

$R = r(\cos\theta + j\sin\theta)$ — real part: $r\cos\theta$, imaginary part: $r\sin\theta$

برای عدد مختلط زیر : $R = a + jb$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

جمع اعداد کمپلکس:

$$R_1 = r_1 e^{J\theta_1}$$
$$R_2 = r_2 e^{J\theta_2}$$

$$R_1 + R_2 = r_1 e^{J\theta_1} + r_2 e^{J\theta_2} = r_1 \cos\theta_1 + J r_1 \sin\theta_1 + r_2 \cos\theta_2 + J r_2 \sin\theta_2$$

$$= \underbrace{(r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos\theta_2)}_{Real} + J\underbrace{(r_1 \sin\theta_1 + r_2 \sin\theta_2)}_{imaginary}$$

منطبق بر جمع بردارها است.

تفریق اعداد کمپلکس:

$$R_1 - R_2 = (r_1 \cos\theta_1 - r_2 \cos\theta_2) + J(r_1 \sin\theta_1 - r_2 \sin\theta_2)$$

منطبق بر تفریق بردارها است.

حاصلضرب اعداد کمپلکس:

$$R_1 \cdot R_2 = r_1 e^{J\theta_1} \cdot r_2 e^{J\theta_2} = r_1 r_2 e^{J(\theta_1 + \theta_2)}$$

منطبق بر هیچ نوع ضرب برداری (داخلی و خارجی) نمی باشد.

تقسیم اعداد کمپلکس:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1 e^{J\theta_1}}{r_2 e^{J\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{J(\theta_1 - \theta_2)}$$

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

مشتق اعداد مختلط :

$$R = re^{j\theta} \Rightarrow \frac{dR}{dt} = \dot{r}e^{j\theta} + jr\dot{\theta}e^{j\theta}$$

منطبق بر مشتق بردارها است.

در بردارها $\bar{R} = r\bar{u}_r$ و $v = \dot{r}\bar{u}_r + r\dot{\theta}\bar{u}_\theta$ با مقایسه با مشتق اعداد مختلط :

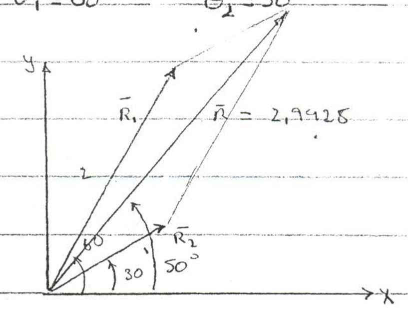
$$\frac{dR}{dt} = \dot{r}e^{j\theta} + jr\dot{\theta}e^{j\theta} \qquad \bar{u}_r = e^{j\theta}$$

$$\bar{u}_\theta = je^{j\theta}$$

مثال : حالت مختلط و برداری را حل کنید :

$r_1 = 2 \qquad r_2 = 1$

$\theta_1 = 60^\circ \qquad \theta_2 = 30^\circ$



اگر بردار باشند

اگر مختلط باشند

$$R_1 = 2e^{j60} \qquad R_2 = 1e^{j30}$$

$$R_1 + R_2 = 2\cos60 + j2\sin60 + 1\cos30 + j\sin30$$

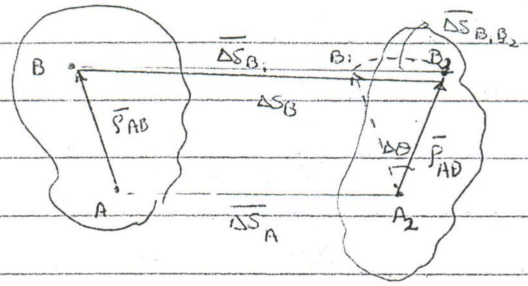
$$= (2\cos60 + \cos30) + j(2\sin60 + \sin30) = 1.866 + j2.232 = R_3$$

$$r_3 = \sqrt{1.866^2 + 2.232^2} = 2.9928$$

$$\theta_3 = \tan^{-1}\frac{2.232}{1.866} = 50^\circ$$

https://t.me/MechSource

objective 9: تعیین رابطه بین سرعت دو نقطه از یک جسم صلب



pure translation حالتی است که سرعت همه‌ی نقاط یکسان باشد

طبق قضیه chasler هر حرکت کلی یک جسم صلب برابر است با یک pure translation

به اضافه‌ی یک pure rotation .

از روی شکل:
$$\overline{\Delta S}_B = \overline{\Delta S}_{B_1} + \overline{\Delta S}_{B_1B_2}$$

$$\overline{\Delta S}_B = \overline{\Delta S}_A + \overline{\Delta S}_{B_1B_2} \Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{\Delta S}_B}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{\Delta S}_A}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{\Delta S}_{B_1B_2}}{\Delta t}$$

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{\omega} \times \bar{\rho}_{AB} \quad (a) \qquad \omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{B/A} \quad (b)$$

$$\bar{V}_{B/A} = \bar{\omega} \times \bar{\rho}_{AB} \quad (c)$$

رابطه‌ی (b) یک مثلث برداری است

https://t.me/MechSource

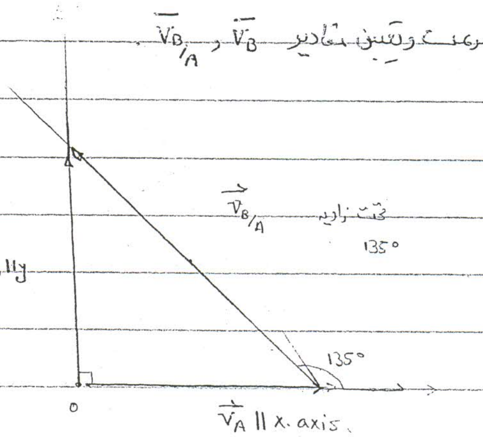
مثال: از یک جسم صلب اطلاعات زیر معلوم است:

۱- $\overline{V}_A$ برابر $20\ in/s$ موازی محور x

۲- $\overline{V}_B$ موازی محور y حرکت می‌کند

۳- $\overline{V}_{B/A}$ تحت زاویه $135°$ با محور x حرکت می‌کند

مطلوب است ترسیم دیاگرام سرعت و تعیین مقادیر $\overline{V}_B$ و $\overline{V}_{B/A}$.



۱- مبدأ o_v و مقیاس مناسبی انتخاب می‌کنیم $\quad 1in = 10\ in/sec$

۲- سرعت $\overline{V}_A$ را از مبدأ o_v رسم می‌کنیم

۳- سرعت نقطه B:

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{B/A}$$

چون از مثلث برداری بالا $\overline{V}_A$ معلوم و $\overline{V}_B \parallel y_{axis}$ و $\overline{V}_{B/A}$ تعداد زاویه $135°$ مثبت با x_{axis} می‌باشد لذا مثلث برداری قابل ترسیم است.

۴- با استفاده از مقیاس

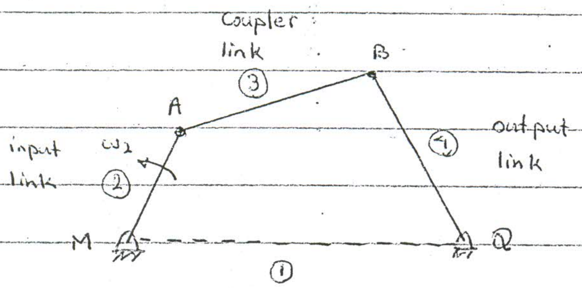
$$\begin{cases} V_B = 20\ in/sec \\ V_{B/A} = 20\sqrt{2}\ in/sec \end{cases}$$

https://t.me/MechSource

Objective 5

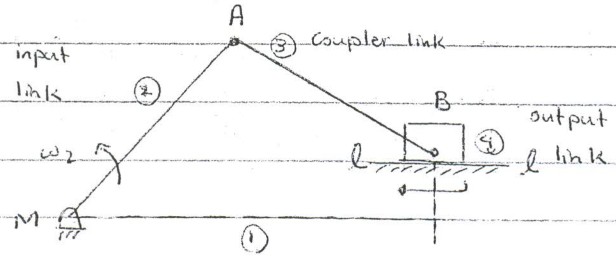
مکانیزم های چهارمیله ای ساده :

هدف : سرعت دورانی ساده و با انتخاب ابعاد مناسب یک حرکت دلخواه را بدست آوریم .

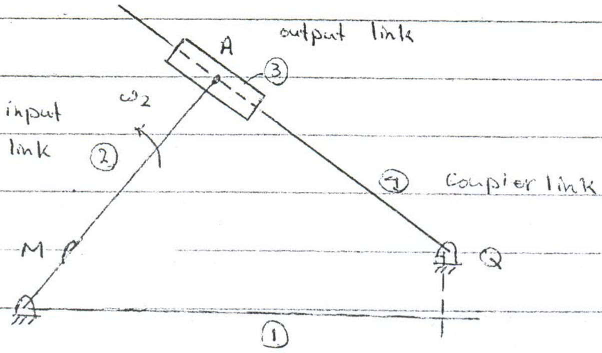


Four-bar linkage system

هدف : با سرعت دورانی ساده و با انتخاب ابعاد مناسب حرکت خطی دلخواه را بدست می آوریم .



Slider crank Mechanism

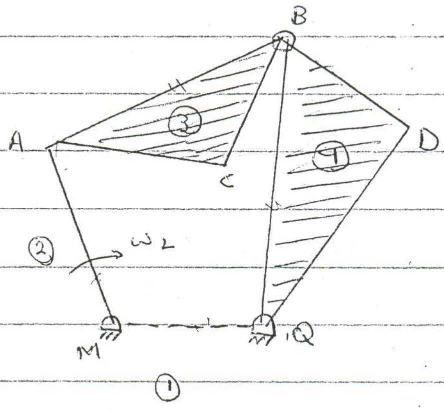


Inverted slider crank Mechanism

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

مثال: مطلوب است ترسیم دیاگرام سرعت مکانیزم چهار میله‌ای زیر



$MA = 4''$

$AB = 8''$

$QB = 5{,}5''$

$MQ = 5''$

$\omega_2 = 94{,}2 \; rad/sec$

ترسیم:

۱- مبداء O_V و مقیاس مناسب انتخاب می‌کنیم

$1\text{in} \; \overline{\quad 10 \; ft/sec \quad}$

2- سرعت نقطه‌ی A

$\vec{V}_A = \vec{V}_M + \vec{V}_{A/M}$

$V_A = MA \cdot \omega_2 = 94.2 \times 4 = 376{,}8 \times \frac{1}{12} = 31{,}4 \; ft/sec \; \perp MA$

3- سرعت نقطه‌ی B

$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$

چون $V_{B/A}$ عمود بر AB و V_B عمود بر QB می‌باشد

لذا مثلث برداری قابل ترسیم است.

۴- با استفاده از مقیاس

$V_{B/A} = 20 \; ft/sec$

$V_B = 34 \; ft/sec$

5- سرعت دورانی میله‌های ③ و ④

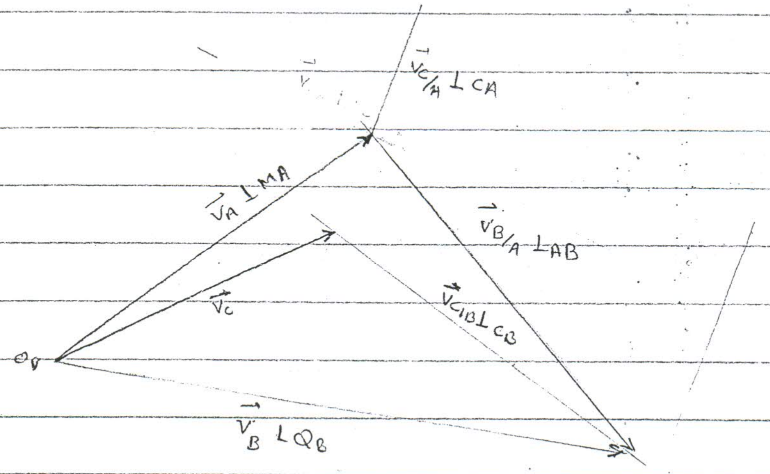
$\omega_3 = \frac{V_{B/A}}{AB} = \frac{20}{8} \times 12 = 30 \; rad/sec$ ساعت ↻

$\omega_4 = \frac{V_B}{QB} = \frac{34}{5{,}5} \times 12 = 74{,}2 \; rad/sec$ ساعت ↻

V

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource



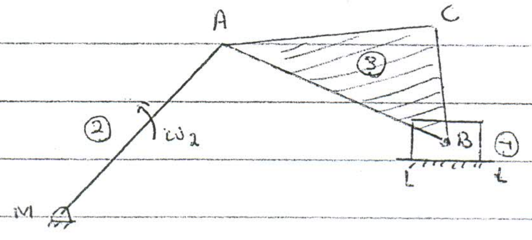
5: سرعت نقطه‌ی C:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{C/A}$$

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{C/B}$$

چون $\vec{V}_{C/A}$ عمود بر CA و $\vec{V}_{C/B}$ عمود بر BC می‌باشد لذا از تلاقی دو معادله‌ی برداری بالا $\vec{V}_C$ پیدا می‌شود

مثال: مطلوب است دیاگرام سرعت یک slider crank Mechanism



MA = 2"

AB = 3"

AC = 1.5"

n_2 = 600 rpm

1ـ مبدأ O_V و مقیاس مناسب انتخاب می‌کنیم 1in ⟶ 5.23 ft/sec

2ـ سرعت نقطه‌ی A:

$$\omega_2 = \frac{2\pi n_2}{60} = \frac{2\pi \times 600}{60} = 62.8 \ rad/sec$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_M + \vec{V}_{A/M} \Rightarrow V_{A/M} = \omega_2 \times AM = 62.8 \times \frac{2}{12} = 10.46 \ ft/sec \perp MA12$$

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

۳- سرعت نقطه B : $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$

چون $\vec{V}_{B/A}$ عمود بر $\vec{AB}$ و $\vec{V}_B$ موازی LL است لذا مثلث برداری قابل ترسیم است

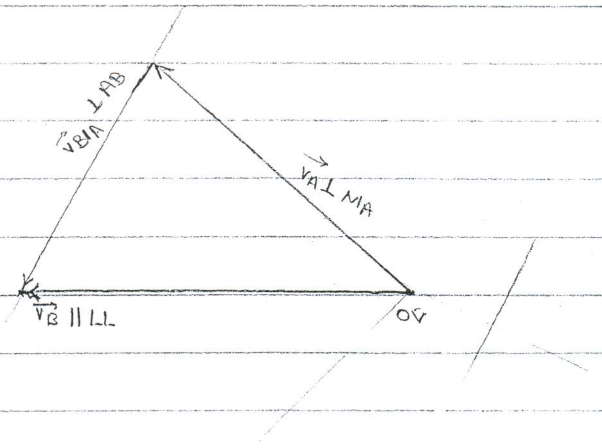
۴- با استفاده از مقیاس

$V_B = 10{,}46 \ ft/sec$

$V_{B/A} = 6{,}54 \ ft/sec$

۵- سرعت دورانی میله ③

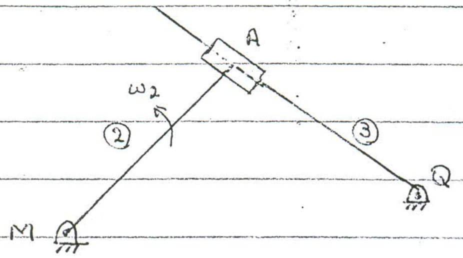
$$\omega_3 = \frac{V_{B/A}}{AB} = \frac{6{,}54}{3} \times 12 = 26{,}16 \ rad/sec$$ (ساعتگرد)



https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

مثال ۲: مطلوب است ترسیم دیاگرام سرعت مکانیزم inverted slider crankk



$MA = 2''$

$MQ = 4.1''$

$n_2 = 600\ rpm$

$Q_A = 3''$

ترسیم:

۱- مبدا o_v و مقیاس مناسب انتخاب می‌کنیم — $1in = 5.23\ ft/sc$

۲- سرعت نقطه A روی میله ② (A_2)

$$\vec{V}_{A_2} = \vec{V}_M + \vec{V}_{A_2/M}$$

$$V_{A_2/M} = AM \cdot \omega_2 = \frac{2}{12} \times \frac{2\pi\, 600}{60} = 10.46\ ft/sec \perp AM$$

3. سرعت نقطه A_3 (نقطه A روی میله ③):

$$\vec{V}_{A_3} = \vec{V}_{A_2} + \vec{V}_{A_3/A_2}$$

چون $\vec{V}_{A_3} \perp QA$ و $\vec{V}_{A_3/A_2} \parallel AQ$ می‌باشد لذا مثلث برداری قابل ترسیم است.

۴- پس مقیاس:

$V_{A_3/A_2} = $ [illegible]

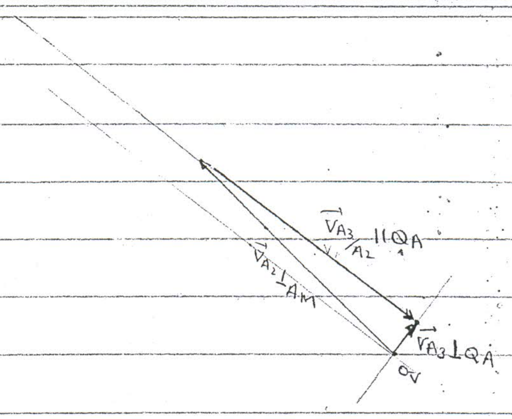
$V_{A_3} = .6 \times 5.23$

5 سرعت دورانی میله 3:

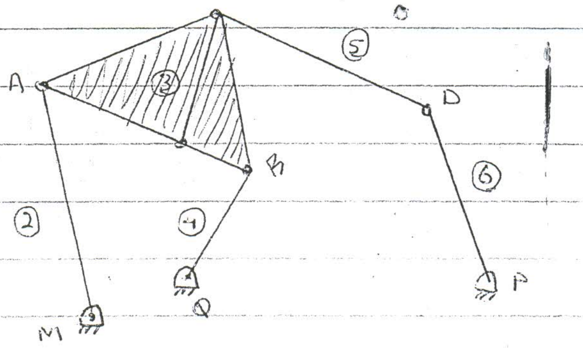
$$\omega_3 = \frac{V_{A_3}}{QA} = \frac{.6 \times 5.23 \times 12}{3} = 12.55\ rad/sec \quad \text{(ساعتگرد)}$$

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource



مثال: مطلوب است ترسیم دیاگرام سرعت مکانیزم ۶ میله‌ای:



$MA = 2''$

$PD = 2''$

$n_2 = 900\ rpm$

ترسیم:

۱. مبدأ O_V و مقیاس مناسب انتخاب می‌کنیم $1in = 5{,}23\ ft/sec$

2. سرعت نقطهٔ A: $\omega_2 = \frac{2\pi n_2}{60} = \frac{2\pi 900}{60} = 94{,}2\ \frac{rad}{sec}$

$\vec{V}_{A_2} = \vec{V}_M + \vec{V}_{A_2/M}$

$\vec{V}_{A/M} = AM \cdot \omega_2 = 2 \times \frac{94{,}2}{12} = 15{,}7\ ft/sec \perp AM$

3. سرعت نقطهٔ B: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$

چون $\vec{V}_{B/A} \perp BA$ و $\vec{V}_B \perp QB$ می‌باشد لذا مثلث برداری قابل ترسیم است.

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

۴- سرعت نقطه‌ی C

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{C/A}$$

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{C/B}$$

چون $\vec{V}_{C/A} \perp AC$ و $\vec{V}_{C/B} \perp BC$ و $\vec{V}_A$ و $\vec{V}_B$ معلوم می‌باشند لذا از تلاقی دو معادله‌ی ۱ و ۲، $\vec{V}_C$ بدست می‌آید

5- سرعت نقطه‌ی D

$$\vec{V}_D = \vec{V}_C + \vec{V}_{D/C}$$

چون $\vec{V}_D \perp PD$ و $\vec{V}_{D/C} \perp DC$ لذا مثلث برداری قابل رسم است.

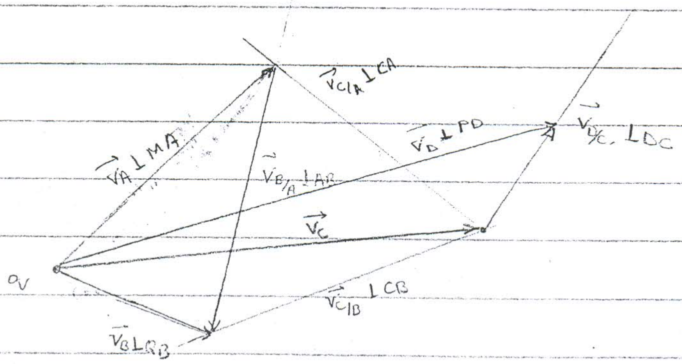
6- از مقیاس:

$$\omega_3 = \frac{V_{B/A}}{AB} = 5,23 \times \frac{2,9}{1,9 \times 12} = 62,8 \ rad/sec$$ ساعت

$$\omega_4 = \frac{V_B}{QB} = 5,23 \times \frac{2,6 \times 12}{1,75} = 93,6 \ rad/sec$$ ساعت

$$\omega_5 = \frac{V_{D/C}}{DC} = 5,23 \times \frac{0,6 \times 12}{2,1} = 17,9 \ rad/sec$$ مثلثاتی

$$\omega_6 = \frac{V_D}{PD} = 5,23 \times \frac{3,3 \times 12}{2} = 103,55$$ ساعت



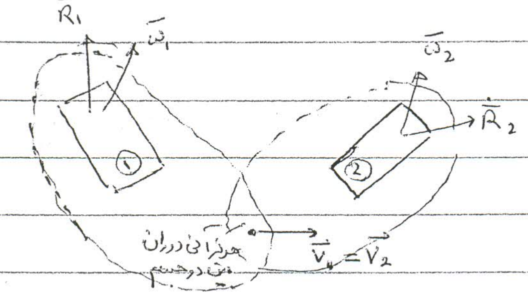
https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

شورای صنفی دانشکده

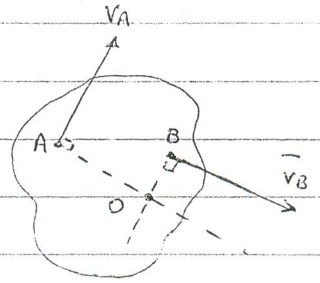
objective 7 : تعیین مرکز آنی دوران :

مرکز آنی دوران بین دو جسم صلب عبارت است از نقطه‌ای که روی دو جسم و یا در امتداد فرضی دو جسم قرار گرفته و velocity آن بین دو جسم در آن نقطه یکسان باشد



حالت خاص : مرکز آنی دوران یک جسم و زمین :

چون velocity زمین صفر فرض می‌شود مرکز آنی دوران جسم و زمین عبارت است از نقطه‌ای که روی جسم و یا در امتداد فرضی آن قرار گرفته و velocity آن صفر می‌باشد



O : مرکز آنی دوران بین جسم و زمین

اگر جسمی تنها انتقال داشته باشد مرکز آنی دوران آن در بی‌نهایت قرار دارد.

تعداد کل مراکز آنی دوران بین n جسم برابر است با :

$$N = \frac{n(n-1)}{2}$$

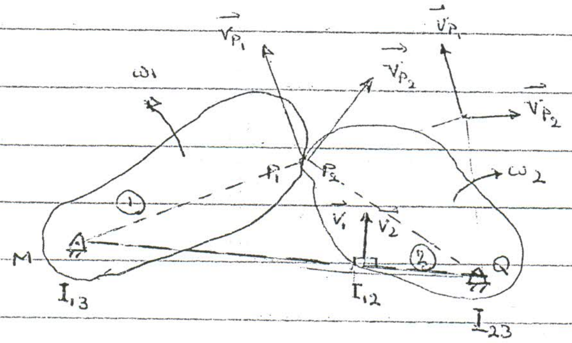
https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

Kennedy's Theorem

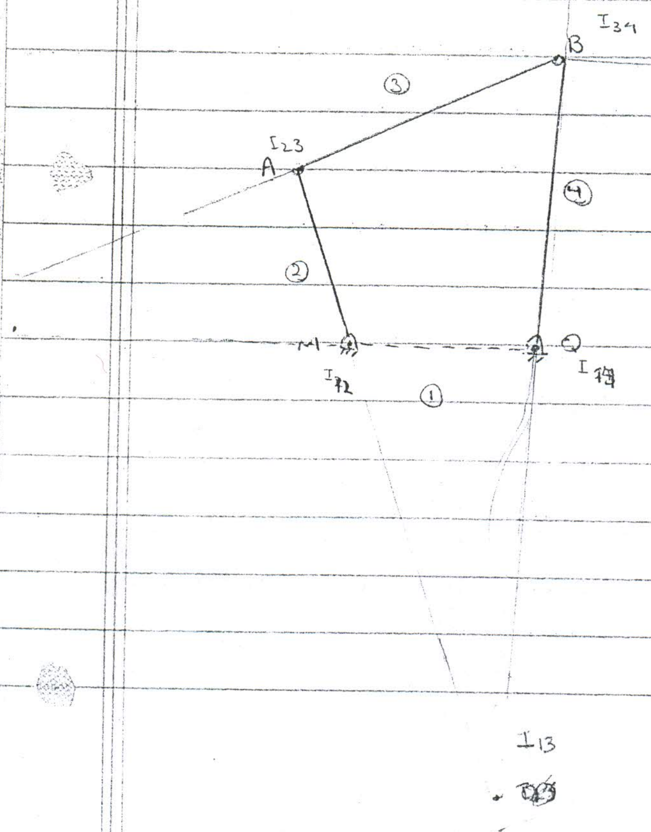
هر سه جسم صلب نسبت به هم مجموعاً دارای سه مرکز آنی دوران می‌باشند که روی یک خط مستقیم قرار دارند

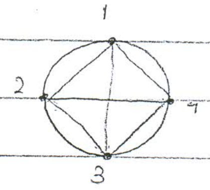
اثبات :



3

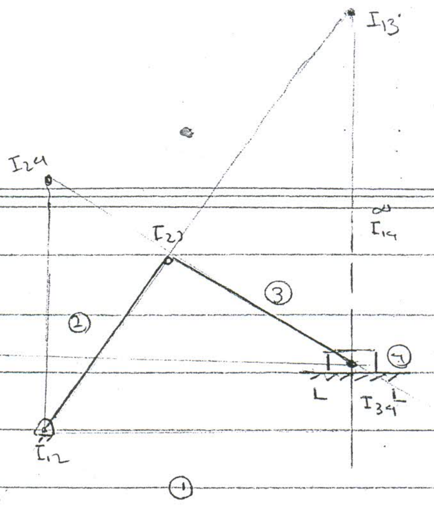
$$I_{13}I_{12} \times \omega_1 = I_{12}I_{23} \times \omega_2$$

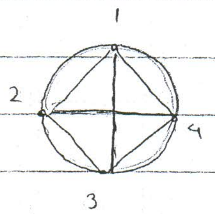




https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource





19

https://t.me/MechSource

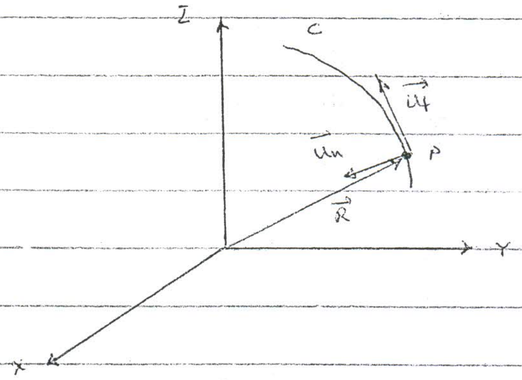
Unit III : Acceleration Analysis of Linkages :

objective 1 : تعریف شتاب در کورهای مختصات مختلف :

بنا به تعریف Velocity : $\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}\Big)_{xyz}$

و تعریف Acceleration : $\vec{A} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\Big)_{xyz}$

Part I : شتاب در کور مختصات برحسب متغیرهای مسیر



$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}\Big)_{xyz}$$

$$\vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{u}_t$$

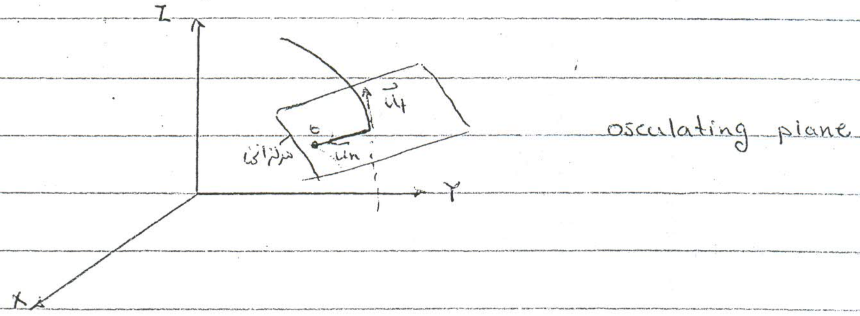
$$\vec{A} = \frac{d^2R}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{u}_t + \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d\vec{u}_t}{ds}\frac{ds}{dt}$$

از ریاضیات داریم : $\frac{d\vec{u}_t}{ds} = \frac{\vec{u}_n}{\rho}$

لذا داریم : $\vec{A} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{u}_t + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{\vec{u}_n}{\rho}$

ρ شعاع انحنا، $\vec{u}_n$ بردار یکه در جهت مرکز انحناست و همه در osculating plane قرار دارند



شتاب در مختصات استوانه‌ای : Part II

$$\vec{A} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\vec{V} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$$

$$\vec{A} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \ddot{z}\vec{u}_z$$

$$\vec{A} = (\ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + \ddot{z}\vec{u}_z)$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \qquad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$$

$$\vec{A} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$$

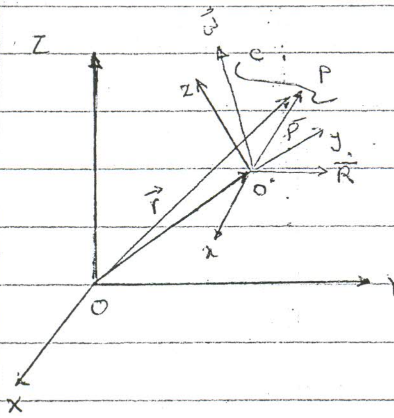
شتاب ذره در دو محور مختصات : Parts III, IV, V

فرض کنید ذره‌ی متحرک P در داخل محور مختصات xyz در حال حرکت است. محور مختصات xyz متحرک دارای حرکت کلی $\vec{R}$ و $\vec{\omega}$ نسبت به محور مختصات اینرسی XYZ می باشد

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource



می‌خواهیم سرعت و شتاب مطلق ذره‌ی P را در محور مختصات مطلق XYZ تعیین کنیم.

$\vec{R}$ = بردار موقعیت مرکز مختصات xyz در XYZ.

$\vec{r}$ = بردار موقعیت ذره‌ی P در XYZ.

همواره رابطه‌ی برداری زیر برقرار است: $\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$

همواره مشتق رابطه‌ی بالا نسبت به زمان در مختصات اینرسی XYZ برقرار است:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\Big)_{XYZ} = \frac{d\vec{R}}{dt}\Big)_{XYZ} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}\Big)_{XYZ} \qquad (a)$$

چون ρ در مختصات متحرک xyz تعریف شده ولی مشتق آن در مختصات اینرسی XYZ نسبت به زمان گرفته شده لذا داریم:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt}\Big)_{XYZ} = \frac{d\vec{\rho}}{dt}\Big)_{xyz} + \vec{\omega}\times\vec{\rho} \qquad (b)$$

در معادله‌ی (a) قرار می‌دهیم:

$$\frac{dr}{dt}\Big)_{XYZ} = \frac{d\vec{R}}{dt}\Big)_{XYZ} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}\Big)_{xyz} + \vec{\omega}\times\vec{\rho}$$

و یا داریم:

$$\vec{V}_{XYZ} = \dot{\vec{R}} + \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega}\times\vec{\rho}$$

برای محاسبه‌ی شتاب از سرعت نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

$$\frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt}\Big)_{XYZ} = \frac{d\dot{\vec{R}}}{dt}\Big)_{XYZ} + \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\Big)_{XYZ} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Big)_{XYZ} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt}\Big)_{XYZ} \quad (c)$$

چون $\vec{V}_{xyz}$ و $\vec{\rho}$ در مختصات متحرک xyz تعریف می‌شوند ولی مشتق آن‌ها نسبت به زمان در مختصات اینرسی گرفته شده ولذا :

$$\frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\Big)_{XYZ} = \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\Big)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz}$$

$$\frac{d\rho}{dt}\Big)_{XYZ} = \frac{d\rho}{dt}\Big)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

در رابطه‌ی (c) قرار می‌دهیم :

$$\frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt}\Big)_{XYZ} = \frac{d\dot{\vec{R}}}{dt}\Big)_{XYZ} + \underbrace{\frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\Big)_{xyz}}_{\vec{a}_{xyz}} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \frac{d\omega}{dt}\Big)_{XYZ} \times \vec{\rho}$$

$$+ \vec{\omega} \times \underbrace{\frac{d\vec{\rho}}{dt}\Big)_{xyz}}_{\vec{V}_{xyz}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$$

بنابراین :

$$\vec{A}_{XYZ} = \ddot{\vec{R}} + \vec{A}\Big)_{xyz} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$$

در معادلات فوق :

$\vec{V}_{XYZ}$: سرعت ذره در مختصات مطلق XYZ

$\vec{A}_{XYZ}$: شتاب ذره در مختصات مطلق XYZ

$\dot{\vec{R}}$: سرعت مرکز مختصات متحرک xyz در مختصات مطلق XYZ

$\ddot{\vec{R}}$: شتاب مرکز مختصات متحرک xyz در مختصات مطلق XYZ

$\vec{V}_{xyz}$: سرعت ذره P در مختصات متحرک xyz

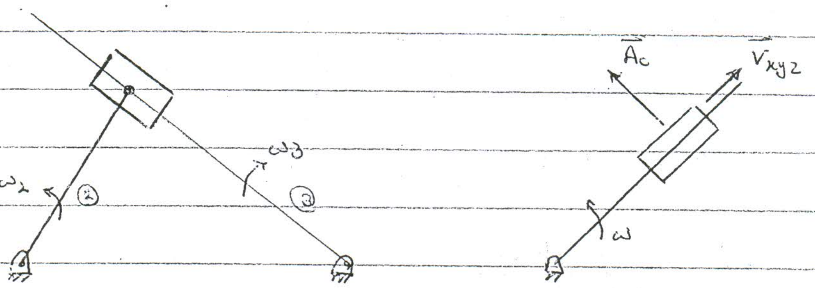
$\vec{a}_{xyz}$: شتاب ذره P در مختصات متحرک xyz

23 Coriolis acceleration : $2\omega \times V_{xyz}$

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

و زمانی بوجود می آید که جسم دارای دوران باشد و همزمان سرعت نسبی هم داشته باشد



جهت شتاب کوریولیس از قانون دست راست بدست می آید

کاربرد اعداد مختلط: objective 2

$$R = re^{j\theta} \Rightarrow \frac{dR}{dt} = \dot{r}e^{j\theta} + jr\dot{\theta}e^{j\theta} \Rightarrow \vec{u}_r = e^{j\theta}$$

$$v = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \qquad \vec{u}_\theta = je^{j\theta}$$

حال برای بدست آوردن شتاب دوباره از رابطه ی بالا مشتق می گیریم:

مشتق دوم اعداد مختلط:

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \ddot{r}e^{j\theta} + j\dot{r}\dot{\theta}e^{j\theta} + j\dot{r}\dot{\theta}e^{j\theta} + jr\ddot{\theta}e^{j\theta} - r\dot{\theta}^2e^{j\theta}$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e^{j\theta} + j(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})e^{j\theta}$$

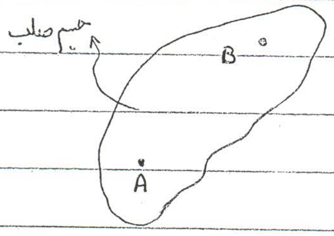
https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

objective 3

شتاب بین دو نقطه از یک جسم صلب

اثبات شد: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{AB}$



از رابطه‌ی سرعت نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$\left.\frac{d\vec{V}_B}{dt}\right)_{xyz} = \left.\frac{d\vec{V}_A}{dt}\right)_{xyz} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{AB})$$

و یا:

$$\vec{A}_B = \vec{A}_A + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{AB})}_{\vec{A}_{B/A}}$$

داریم:

$$\boxed{\vec{A}_B = \vec{A}_A + \vec{A}_{B/A}}$$

که:

$$\vec{A}_{B/A} = \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}_{AB}}_{\vec{A}^t_{B/A}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{AB})}_{\vec{A}^r_{B/A}}$$

زیرا:

$$\vec{A}^t_{B/A} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}_{AB} \quad \perp AB$$

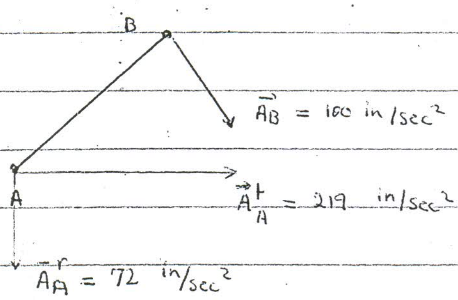
$$\vec{A}^r_{B/A} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{AB}) \quad \parallel AB$$

همواره مقدار $A^r_{B/A}$ مشخص است اما بعد از رسم دیاگرام سرعت

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

مثال 3: از جسم صلب AB شتاب نقاط A و B در شکل نشان داده شده‌اند. دیاگرام شتاب را رسم کنید



AB = 1 in

ترسیم:

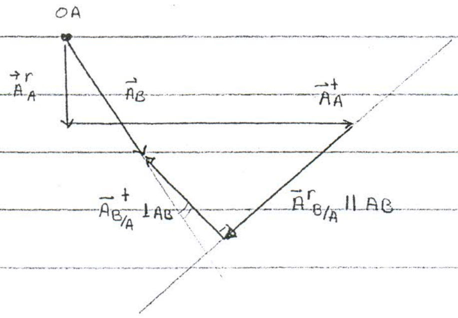
1- مبدأ O_A و مقیاس مناسب را رسم می‌کنیم: $1\ in = 50\ in/sec^2$

2- شتاب نقطه B: $\vec{A}_B = \vec{A}_A + \vec{A}_{B/A}$

برحسب مؤلفه‌ها

$$\vec{A}_B = \vec{A}^r_A + \vec{A}^t_A + \vec{A}^r_{B/A} + \vec{A}^t_{B/A}$$

چون $\vec{A}^r_{B/A}$ موازی AB، و $\vec{A}^t_{B/A}$ عمود بر AB می‌باشند لذا چندضلعی برداری قابل ترسیم است:



3. شتاب زاویه‌ای میله AB (مثلثاتی)

$$\alpha_{AB} = \frac{A^t_{B/A}}{AB} = \frac{96}{1} = 96\ rad/s^2$$

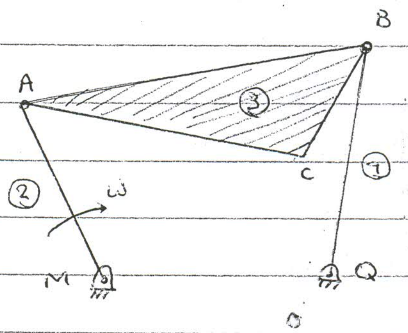
https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

objective 5

روش ترسیم دیاگرام شتاب مکانیزم ها

مثال : مکانیزم چارمیله‌ای زیر مفروض است . مطلوب است ترسیم دیاگرام شتاب



$MA = 4''$

$AB = 8''$

$QB = 5.5''$

$MQ = 5''$

$\omega_2 = 94.2 \ rad/sec$

$\alpha_2 = 0$

$\omega_3 = 30 \ rad/s$

$\omega_4 = 74.2 \ rad/s$

ترسیم :

۱. مبدا O_A و مقیاس مناسب انتخاب می‌کنیم. $1in = 1000 \ ft/sec^2$

۲. شتاب نقطه A :

$$\vec{A}_A = \vec{A}_M + \vec{A}_{A/M} = \vec{A}^r_{A/M} + \vec{A}^t_{A/M}$$

$$A^r_{A/M} = MA \times \omega_2^2 = \frac{4}{12} \times (94.2)^2 = 2960 \ ft/sec^2 \parallel AM$$

۳. شتاب نقطه B :

$$\vec{A}_B = \vec{A}_A + \vec{A}_{B/A} \Rightarrow \vec{A}^r_B + \vec{A}^t_B = \vec{A}_A + \vec{A}^r_{B/A} + \vec{A}^t_{B/A} \quad (a)$$

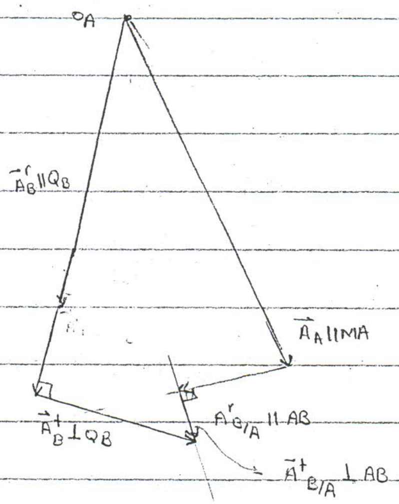
$$A^r_B = BQ \times \omega_4^2 = \frac{5.5}{12} \times (74.2)^2 = 2520 \ ft/sec^2 \parallel QB$$

$$A^r_{B/A} = AB \times \omega_3^2 = \frac{8}{12} \times 30^2 = 600 \ ft/sec \parallel AB$$

چون $\vec{A}^t_B$ عمود بر QB و چون $\vec{A}^t_{B/A}$ عمود بر AB می باشد لذا چندضلعی بردارهای قابل ترسیم است :

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource



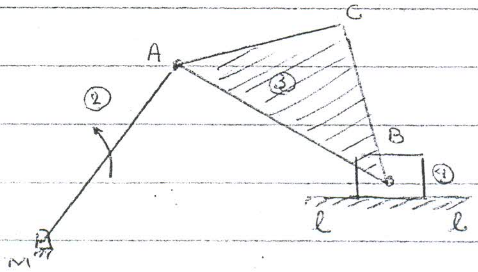
۶: با توجه به مقیاس داریم: جواب $\vec{A}^t_B$ و $\vec{A}^t_{B/A}$ با توجه به معادله (a) معلوم رسم می‌شود جواب آن‌ها با توجه به مقیاس معلوم می‌شود

5: شتاب دورانی: ساعت

$$\alpha_3 = \frac{A^t_{B/A}}{AB} = \frac{120}{8/12} = 180 \ \text{rad/sec}^2$$ ساعت

$$\alpha_4 = \frac{A^t_B}{QB} = \frac{1150}{5{,}5/12} = 2510 \ \text{rad/sec}^2$$ ساعت

مثال: مطلوب است رسم دیاگرام شتاب مکانیزم slider-crank :



$MA = 2''$

$AB = 3''$

$AC = 1{,}5''$

$\omega_2 = 62{,}8$ rps

$\omega_3 = 26{,}16$ rps

$\alpha_2 = 0$

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

ترسیم:

۱- مبدأ O_A و مقیاس مناسب انتخاب می‌کنیم: $1\,in = 200\ Ft/sec^2$

۲- شتاب نقطهٔ A:

$$\vec{A}_A = \vec{A}_M + \vec{A}_{A/M} = \vec{A}^r_{A/M} + \vec{A}^t_{A/M}$$

$$A^r_{A/M} = AM \cdot \omega_2^2 = \frac{2}{12} \times 62{,}8^2 = 657{,}6\ \frac{Ft}{sec^2} \parallel MA$$

۳- شتاب نقطهٔ B:

$$\vec{A}_B = \vec{A}_A + \vec{A}_{B/A} = \vec{A}_A + \vec{A}^r_{B/A} + \vec{A}^t_{B/A} \quad (a)$$

چون $\vec{A}_B$ موازی ll و $\vec{A}^t_{B/A}$ عمود بر AB می‌باشد لذا چند ضلعی برداری قابل ترسیم است.

$$A^r_{B/A} = AB \times \omega_3^2 = \frac{3}{12} \times (26{,}16)^2 = 171\ Ft/sec^2 \parallel AB$$

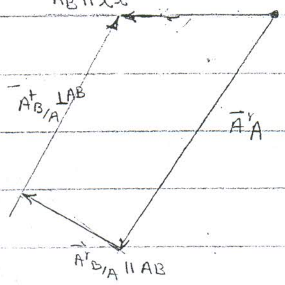
۴- از مقیاس:

$A_B = 397\ Ft/sec^2$

$A^t_{B/A} = 496\ Ft/sec^2$

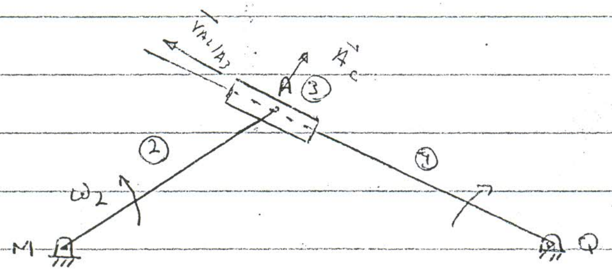
جهات $\vec{A}_B$ و $\vec{A}^t_{B/A}$ از معادلهٔ (a) معلوم می‌شود:

$$\alpha_3 = \frac{A^t_{B/A}}{AB} = \frac{496}{3/12} = 1985\ rad/sec^2 \quad \text{ساعتگرد}$$



https://t.me/MechSource

مثال ۳: مطلوب است ترسیم دیاگرام شتاب مکانیزم زیر.



$MA = 2''$

$MQ = 4.1''$

$\omega_2 = 62.8$ rps

$V_A = 10.46$ ft/sec

$V_{A_2/A_3} = 9.93$ fps

$QA = 3''$

$\alpha_2 = 0$

ترسیم:

۱- مبدا O_A و مقیاس مناسب انتخاب می کنیم. 1 in = 150 fps

[illegible]

۲- شتاب نقطه A:

$$\vec{A}_{A_2} = \vec{A}_M + \vec{A}_{A_2/M} = \vec{A}^r_{A_2/M} = MA\,\omega_2^2$$

$$= \frac{2}{12} \times (62.8)^2 = 657 \text{ fps}^2 \parallel MA$$

۳- شتاب

$$\vec{A}_{A_2} = \vec{A}_{A_3} + \vec{A}_{A_2/A_3} + \vec{A}_c = \vec{A}^r_{A_3} + \vec{A}^t_{A_3} + \vec{A}^r_{A_2/A_3} + \vec{A}^t_{A_2/A_3} + \vec{A}_c$$

$\vec{A}_c = 2\vec{\omega}_3 \times \vec{V}_{A_2/A_3}$

$\vec{A}^r_{A_2/A_3}$ برابر صفر در نظر گرفته در A^t آن را برابر شتاب نسبی

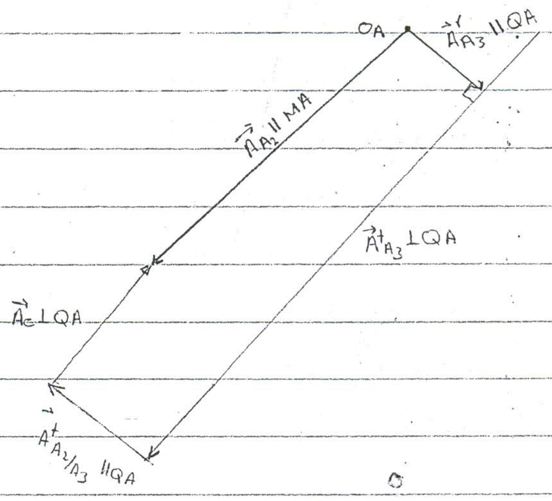
چون $\vec{A}^t_{A_2}$ عمود بر QA و $\vec{A}^t_{A_2/A_3}$ موازی با QA می باشند لذا چند ضلعی برداری قابل ترسیم است:

$$A^r_{A_3} = QA\,\omega_3^2 = \frac{3}{12} \times (12.55)^2 = 39.9 \text{ ft/sec}^2 \parallel QA$$

$$A_c = 2\omega_3 \times V_{A_2/A_3} = 2 \times 12.55 \times 9.93 = 249 \text{ ft/sec}^2 \perp QA$$

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource



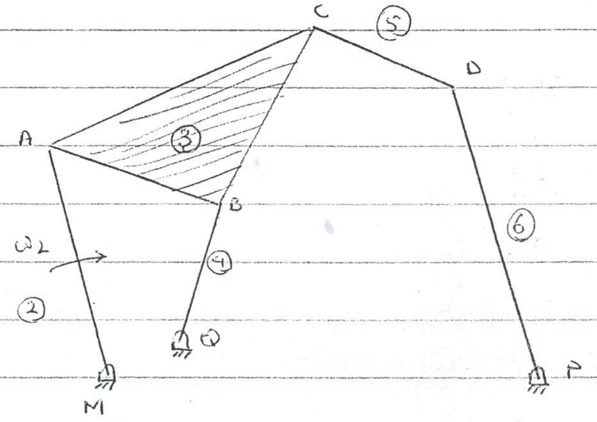
4- ارتباس:

$A^t_{A_3} = 857 \ Ft/sec^2$

$A^t_{A_2/A_3} =$

5. شتاب دورانی میله 3 : $\alpha_3 = \frac{A^t_3}{QA} = \frac{857}{3/12} = 3428 \ rad/sec^2$ مثلثاتی

مثال:



$\omega_2 = 94.2$ rps

$V_A = 15.7$ Fps

$\omega_3 = 62.8$ rps

$\omega_4 = 93.6$ rps

$\omega_5 = 17.9$ rps

$\omega_6 = 103.55$

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

رسم:

1- مبدأ O_A و مقیاس مناسب انتخاب می‌کنیم. $1 in = 500\ ft/sec^2$

2- شتاب A

$$\vec{A}_A = \vec{A}_M + \vec{A}_{A/M} = \vec{A}^{r}_{A/M}$$

$$A^{r}_{A/M} = MA \times \omega_2^2 = \frac{2}{12} \times (99.2)^2 = 1479\ ft/sec^2 \parallel MA$$

3- شتاب نقطه B

$$\vec{A}^{t}_B + \vec{A}^{r}_B = \vec{A}_A + \vec{A}^{r}_{B/A} + \vec{A}^{t}_{B/A}$$

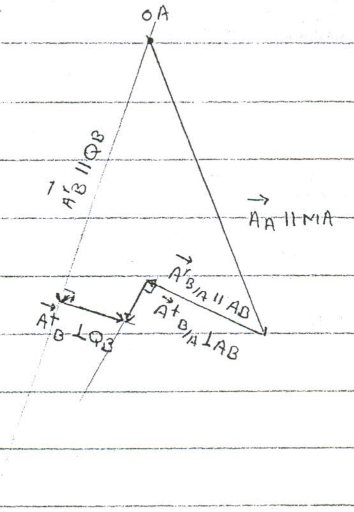
$$A^{r}_B = QB(\omega_4)^2 = \frac{1.75}{12} \times (93.6)^2 = 1278\ ft/sec^2 \parallel QB$$

$$A^{r}_{B/A} = AB \times (\omega_3)^2 = \frac{1.88}{12} \times (62.8)^2 = 618\ ft/sec^2 \parallel AB$$

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

شورای صنفی دانشکده



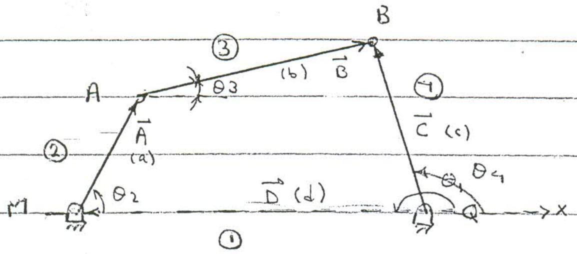
https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

Unit III

Displacement velocity and Acceleration Analysis of Linkage Using Analytical Methods

objective 1 تحلیل مکانیزم چهارمیله‌ای



معادله‌ی حرکت مکانیزم بالا رابطه‌ی برداری زیر برقرار است:

$$\vec{D} + \vec{A} + \vec{B} - \vec{C} = 0$$

در مقایسه با اعداد کمپلکس:

$$D = de^{j\theta_1}$$
$$A = ae^{j\theta_2}$$
$$B = be^{j\theta_3}$$
$$C = ce^{j\theta_4}$$

لذا داریم:

$$de^{j\theta_1} + ae^{j\theta_2} + be^{j\theta_3} - ce^{j\theta_4} = 0$$

با تفکیک معادله‌ی بالا به قسمت حقیقی و موهومی:

$$d\cos\theta_1 + a\cos\theta_2 + b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 = 0$$

https://t.me/MechSource

$$d\sin\theta_1 + a\sin\theta_2 + b\sin\theta_3 - c\sin\theta_4 = 0$$

لو θ_1 بتساوي 180° :

$$\begin{cases} -d + a\cos\theta_1 + b\cos\theta_2 - c\cos\theta_4 = 0 \\ a\sin\theta_2 + b\sin\theta_3 - c\sin\theta_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left[-d + a\cos\theta_2 - c\cos\theta_4\right]^2 = (b\cos\theta_3)^2$$

$+$

$$\left[a\sin\theta_2 - c\sin\theta_4\right]^2 = (-b\cos\theta_3)^2$$

$$d^2 + a^2\cos^2\theta_2 + c^2\cos^2\theta_4 - 2da\cos\theta_2 + 2dc\cos\theta_4 - 2ac\cos\theta_2\cos\theta_4 = b^2\cos^2\theta_3$$

$$a^2\sin^2\theta_2 + c^2\sin^2\theta_4 - 2ac\sin\theta_2\sin\theta_4 = b^2\cos^2\theta_3$$

$$d^2 + a^2 - b^2 + c^2 - 2ad\cos\theta_2 + 2dc\cos\theta_4 - 2ac(\cos\theta_2\cos\theta_4 + \sin\theta_2\sin\theta_4) = 0$$

$$K_1\cos\theta_4 - K_2\cos\theta_2 + K_3 = \cos(\theta_2 - \theta_4)$$

$K_1 = d/a$

$K_2 = d/c$

$K_3 = \dfrac{a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2ac}$

$$\sin\theta_4 = \frac{2\tan\theta_4/2}{1 + \tan^2\theta_4/2} \qquad \cos\theta_4 = \frac{1 - \tan^2\theta_4/2}{1 + \tan^2\theta_4/2}$$

نسمي : $\tan\theta/2$

https://t.me/MechSource

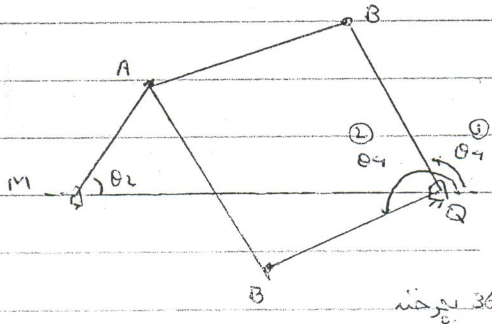
$$A\tan^2\frac{\theta_4}{2} + B\tan\frac{\theta_4}{2} + C = 0$$

$$A = \cos\theta_2 + K_3 - K_2 - K_2\cos\theta_3 \qquad K_1 = \frac{d}{a}$$

$$B = -2\sin\theta_2 \qquad K_2 = \frac{d}{c}$$

$$C = K_1 + K_3 - (1+K_2)\cos\theta_2 \qquad K_3 = \frac{a^2-b^2+c^2+d^2}{2ac}$$

$$\tan\frac{\theta_4}{2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2-4ac}}{2A}$$



working space : $B^2 - 4ac \geq 0$

به دلیل این که دو شکل مختلف برای شروع حرکت داریم

به همین دلیل ± داریم

working space برای θ_2 است.

هر دو Link MA و BQ می‌توانند 360 بچرخند

در صورتی که طول این دو میله باهم و AB و MQ باهم برابر باشند.

محاسبه‌ی رابطه‌ی سرعت:

از معادله‌ی تغییرمکان نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$de^{j\theta_1} + ae^{j\theta_2} + be^{j\theta_3} - ce^{j\theta_4} = 0$$

مشتق رابطه‌ی بالا نسبت به زمان:

3.1 $$aj\omega_2 e^{j\theta_2} + bj\omega_3 e^{j\theta_3} - cj\omega_4 e^{j\theta_4} = 0$$

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

با تفکیک داریم:

$$\begin{cases} a\omega_2 \sin\theta_2 - b\omega_3 \sin\theta_3 + c\omega_4 \sin\theta_4 = 0 \\ a\omega_2 \cos\theta_2 + b\omega_3 \cos\theta_3 - c\omega_4 \cos\theta_4 = 0 \end{cases}$$

دو معادله دو مجهول ω_3 و ω_4 :

$$\omega_3 = \frac{a\omega_2}{b} \cdot \frac{\sin(\theta_4 - \theta_2)}{\sin(\theta_3 - \theta_4)}$$

$$\omega_4 = \frac{a\omega_2}{c} \cdot \frac{\sin(\theta_2 - \theta_3)}{\sin(\theta_4 - \theta_3)}$$

محاسبه‌ی روابط شتاب:

از رابطه‌ی سرعت نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$aj\alpha_2 e^{j\theta_2} - a\omega_2^2 e^{j\theta_2} + bj\alpha_3 e^{j\theta_3} - b\omega_3^2 e^{j\theta_3} - cj\alpha_4 e^{j\theta_4} + c\omega_4^2 e^{j\theta_4} = 0$$

با تفکیک داریم:

$$-a\alpha_2 \sin\theta_2 - a\omega_2^2 \cos\theta_2 - b\alpha_3 \sin\theta_3 - b\omega_3^2 \cos\theta_3 + c\alpha_4 \sin\theta_4 + c\omega_4^2 \cos\theta_4 = 0$$

$$a\alpha_2 \cos\theta_2 - a\omega_2^2 \sin\theta_2 + b\alpha_3 \cos\theta_3 - b\omega_3^2 \sin\theta_3 - c\alpha_4 \cos\theta_4$$

https://t.me/MechSource

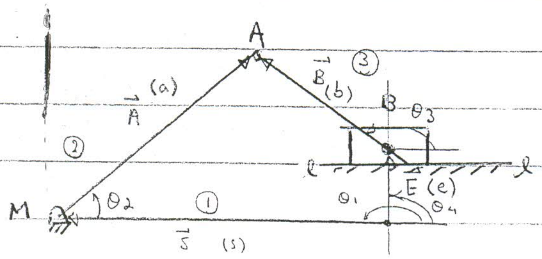
$+ C\omega_4^2 \sin\theta_4 = 0$

حال برای معادله داریم:

$$\alpha_3 = \frac{CD - AF}{AE - BD}$$

$$\alpha_4 = \frac{CE - BF}{AE - BD}$$

آنالیز تغییر مکان مکانیزم slider crank :



برحسب اعداد مختلط:

$$\vec{S} + \vec{A} - \vec{B} - \vec{E} = 0 \Rightarrow Se^{j\theta_1} + ae^{j\theta_2} - be^{j\theta_3} - ee^{j\theta_4} = 0$$

با تفکیک داریم:

$$S\cos\theta_1 + a\cos\theta_2 - b\cos\theta_3 - e\cos\theta_4 = 0$$

$$S\sin\theta_1 + a\sin\theta_2 - b\sin\theta_3 - e\sin\theta_4 = 0 \qquad \theta_1 = 0 , \theta_4 = 90$$

$$\begin{cases} -S + a\cos\theta_2 - b\cos\theta_3 = 0 \\ a\sin\theta_2 - b\sin\theta_3 - e = 0 \end{cases}$$

39

https://t.me/MechSource

$$(-s_1 + a\cos\theta_2)^2 = (b\cos\theta_3)^2 \Rightarrow s^2 + a^2\cos^2\theta_2 - 2sb\cos\theta_2 = b^2\cos^2\theta_3$$

$$(-e + a\sin\theta_2)^2 = (b\sin\theta_3)^2 \Rightarrow e^2 + a^2\sin^2\theta_2 - 2ea\sin\theta_2 = b^2\sin^2\theta_3$$

$$Ls^2 + Ms + N = 0$$

$$L = 1$$

$$M = -2a\cos\theta_2$$

$$N = a^2 + e^2 - b^2 - 2ae\sin\theta_2$$

$$s_{1,2} = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - 4LN}}{2L}$$

$$\sin\theta_3 = \frac{1}{b}\left[a\sin\theta_2 - e\right] \Rightarrow \theta_3 = \sin^{-1}\frac{1}{b}\left[a\sin\theta_2 - e\right]$$

محاسبه‌ی سرعت :

$$\dot{s}\,e^{j\theta_1} + a\omega_2 j e^{j\theta_2} - b j\omega_3 e^{j\theta_3} = 0$$

$$\dot{s}\cos\theta_1 - a\omega_2\sin\theta_2 + b\omega_3\sin\theta_3 = 0$$

$$\theta_1 = 180$$

$$\dot{s}\sin\theta_1 + a\omega_2\cos\theta_2 - b\omega_3\cos\theta_3 = 0$$

$$\begin{cases} -\dot{s} - a\omega_2\sin\theta_2 + b\omega_3\sin\theta_3 = 0 \\ a\omega_2\cos\theta_2 - b\omega_3\cos\theta_3 = 0 \end{cases}$$

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

$$\omega_3 = \frac{a\omega_2}{b}\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_3}$$

$$\dot{S} = a\omega_2\frac{\sin(\theta_3-\theta_2)}{\cos\theta_3}$$

محاسبه‌ی شتاب‌ها:

$$\ddot{S}e^{j\theta_1} + aj\alpha_2 e^{j\theta_2} - a\omega^2 e^{j\theta_2} - bj\alpha_3 e^{j\theta_3} + b\omega_3^2 e^{j\theta_3} = 0$$

با تبدیل داریم:

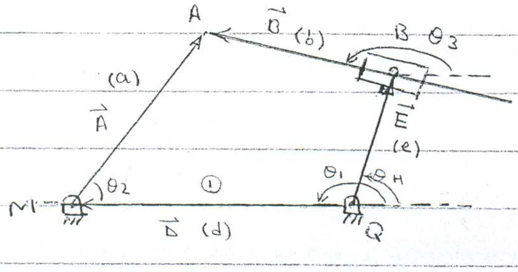
$$\begin{cases} \ddot{S}\cos\theta_1 - a\alpha_2\sin\theta_2 - a\omega^2\cos\theta_2 + b\alpha_3\sin\theta_3 + b\omega_3^2\cos\theta_3 = 0 \\ \ddot{S}\sin\theta_1 + a\alpha_2\cos\theta_2 - a\omega^2\sin\theta_2 - b\alpha_3\cos\theta_3 + b\omega_3^2\sin\theta_3 = 0 \end{cases}$$

($\cos\theta_1 \to -\ddot{S}$, $\sin\theta_1 \to 0$)

$$\alpha_3 = \frac{a\alpha_2\cos\theta_2 - a\omega_2^2\sin\theta_2 + b\omega_3^2\sin\theta_3}{b\cos\theta_3}$$

$$\ddot{S} = \left[-a\alpha_2\sin\theta_2 - a\omega_2^2\cos\theta_2 + b\alpha_3\sin\theta_3 + b\omega_3^2\cos\theta_3\right]$$

آنالیز تغییرات مکانیزم Inverted slider crank:



$$\vec{D} + \vec{A} - \vec{B} - \vec{E} = 0$$

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

برحسب ابعاد کلا :

$$de^{j\theta_1} + ae^{j\theta_2} - be^{j\theta_3} - ee^{j\theta_4} = 0$$

$\theta_1 = 180$

$\theta_3 + 90 + 180 - \theta_4 = 360$

$\theta_3 - \theta_4 = 90^\circ$

$\theta_3 = 90 + \theta_4 \Rightarrow \omega_3 = \omega_4$

$\alpha_3 = \alpha_4$

$$d\cos\theta_1 + a\cos\theta_2 - b\cos\theta_3 - e\cos\theta_4 = 0 \quad (d\cos\theta_1 \to -d)$$

$$d\sin\theta_1 + a\sin\theta_2 - b\sin\theta_3 - e\sin\theta_4 = 0 \quad (\sin\theta_1 \to 0)$$

$$-d + a\cos\theta_2 - b\cos\theta_3 - e\cos\theta_4 = 0$$

$$a\sin\theta_2 - b\sin\theta_3 - e\sin\theta_4 = 0$$

$$\begin{cases} -d + a\cos\theta_2 - e\cos\theta_4 + b\sin\theta_4 = 0 \\ a\sin\theta_2 - e\sin\theta_4 - b\cos\theta_4 = 0 \end{cases}$$

$$b = \frac{a\sin\theta_2 - e\sin\theta_4}{\cos\theta_4}$$

$$\sin\theta = \frac{2\tan\theta/2}{1+\tan^2\theta/2} \qquad \cos\theta = \frac{1-\tan^2\theta/2}{1+\tan^2\theta/2}$$

$$K_1\tan\frac{\theta_4}{2} + K_2\tan\frac{\theta_4}{2} + K_3 = 0$$

$$\tan\theta_4/2 = \frac{-K_2 \pm \sqrt{K_2^2 - 4K_1K_3}}{2K_1}$$

$K_1 = d - e - a\cos\theta_2$

$K_2 = 2a\sin\theta_2$

$K_3 = a\cos\theta_2 - d - e$

https://t.me/MechSource

رابطه‌ی سرعت:

$$a j\omega_2 e^{j\theta_2} - \dot{b} e^{j\theta_3} - b j\omega_3 e^{j\theta_3} - e j\omega_4 e^{j\theta_4} = 0$$

$$\begin{cases} -a\omega_2 \sin\theta_2 - \dot{b}\cos\theta_3 + b\omega_3 \sin\theta_3 + e\omega_4 \sin\theta_4 = 0 \\ a\omega_2 \cos\theta_2 - \dot{b}\sin\theta_3 - b\omega_3 \cos\theta_3 - e\omega_4 \cos\theta_4 = 0 \end{cases} \qquad \omega_3 = \omega_4, \quad \theta_3 = 90 + \theta_4$$

$$\omega_4 = \omega_3 = \frac{a\omega_2}{b}\sin(\theta_2 - \theta_4)$$

$$\dot{b} = \frac{a\omega_2}{b}\left[b\cos(\theta_4 - \theta_2) - e\sin(\theta_4 - \theta_2)\right]$$

رابطه‌ی شتاب:

$$a j\alpha_2 e^{j\theta_2} - a\omega_2^2 e^{j\theta_2} - \ddot{b} e^{j\theta_3} - \dot{b} j\omega_3 e^{j\theta_3} - \dot{b} j\omega_3 e^{j\theta_3} - b j\alpha_3 e^{j\theta_3}$$

$$+ b\omega_3^2 e^{j\theta_3} - e j\alpha_4 e^{j\theta_4} + e\omega_4^2 e^{j\theta_4} = 0 \qquad \theta_3 = 90 + \theta_4$$

$$-a\alpha_2 \sin\theta_2 - a\omega_2^2 \cos\theta_2 - \ddot{b}\cos\theta_3 + 2\dot{b}\omega_3 \sin\theta_3 + b\alpha_3 \sin\theta_3 + b\omega_3^2 \cos\theta_3$$

$$+ e\alpha_4 \sin\theta_4 + e\omega_4^2 \cos\theta_4 = 0$$

$$a\alpha_2 \cos\theta_2 - a\omega_2^2 \sin\theta_2 - \ddot{b}\sin\theta_3 - 2\dot{b}\omega_3 \cos\theta_3 - b\alpha_3 \cos\theta_3 + b\omega_3^2 \sin\theta_3$$

$$- e\alpha_4 \cos\theta_4 + e\omega_4^2 \sin\theta_4 = 0$$

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

$$\alpha_4 = \frac{AF - CD}{AE - BD}$$

$$\ddot{b} = \frac{CE - BF}{AE - BD}$$

https://t.me/MechSource

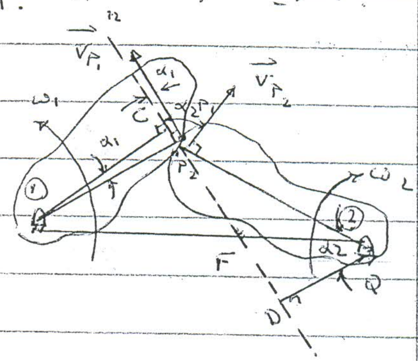
https://t.me/MechSource

Unit V

Fundamental of uniform Rotary Transmission

بنابه تعریف نسبت سرعت بین دو جسم:

$$SR = \frac{\omega_2}{\omega_1} =$$



از روی شکل داریم:

$$V_{P_1} = MP_1 \cdot \omega_1 \implies \omega_1 = \frac{V_{P_1}}{MP_1}$$

$$V_{P_2} = QP_2 \cdot \omega_2 \implies \omega_2 = \frac{V_{P_2}}{QP_2}$$

لذا داریم:

$$\text{Speed ratio}: SR = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{V_{P_2} \cdot MP_1}{V_{P_1} \cdot QP_2}$$

می‌خواهیم که حرکت ما به صورت uniform منتقل شود:

باید جهت نرمال سرعت های مایلی باشد در جهت + می‌تواند مایلی نباشد که در این صورت لغزش داریم.

برای تماس دو جسم در حین انتقال سرعت در راستای شرط تماس:

$$V_{P_1}^{n} = V_{P_2}^{n}$$

خطوط QD و MC را بر خط نرمال مشترک nn عمود می‌کنیم:

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

شرط تماس: $V_{P_1}^n = V_{P_1}\cdot\cos\alpha_1 = V_{P_2}^n = V_{P_2}\cdot\cos\alpha_2$

از روی شکل: $QP_2 = \dfrac{QD}{\cos\alpha_2}$

$MP_1 = \dfrac{MC}{\cos\alpha_1}$

لذا: $SR = \dfrac{\omega_2}{\omega_1} = \dfrac{V_{P_2}\, MP_1}{V_{P_1}\, QP_2} = \dfrac{V_{P_2}\cos\alpha_2\, MC}{V_{P_1}\cos\alpha_1 \cdot QD}$

با رعایت شرط تماس:

$$SR = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{MC}{QD}$$

در مثلث QDF و MCF بنابر زوایای مساوی متشابه‌اند لذا:

$$\boxed{SR = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{MC}{QD} = \frac{MF}{QF} = \frac{FC}{FD}}$$

اگر نقطه F کوچکترین ارتعاشی در آن باشد SR دارای ارتعاش است و اگر مطلق ثابت باشد SR به صورت uniform انتقال می‌یابد

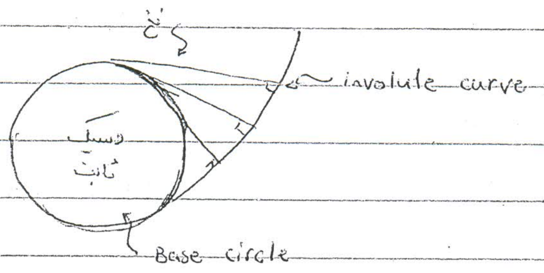
* ما ثابت کردیم اگر نرمال مشترک خط المرکزین را در یک نقطه قطع کند آن نقطه باید مطلق ثابت باشد.

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

منحنی اینولوت : (involute curve)

عبارت است از مکان هندسی انتهای یک نخ که از روی یک دیسک ثابت باز می‌شود.



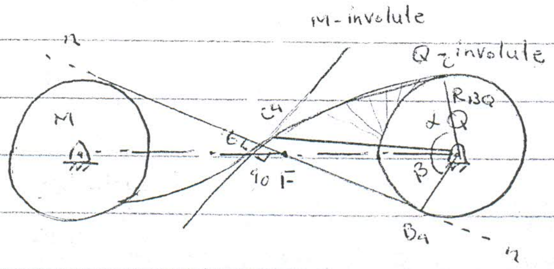
منحنی اینولوت دارای خواص زیر است :

1. در هر نقطه از منحنی شعاع انحنا طول نخ باز شده است

2. مرکز انحنا هر نقطه از منحنی محل تماس نخ باز شده با دیسک است

3. همواره امتداد نخ باز شده در نقطه‌ی مورد نظر عمود بر پروفیل منحنی involute است.

اثبات ثابت بودن نقطه‌ی F :



تنها جایی می‌توان از آن دو عمود بر مماس مشترک دو منحنی رسم کرد نقطه‌ی F روی خط مرکز مشترک دو دیسک است

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

اثبات منحنی involute :

از روی شکل طول قوس دایره Q از نقطه C تا B4 :

$$\widehat{CB_4} = R_{BQ}(\alpha+\beta)$$

با توجه به خاصیت منحنی اینولوت :

$$\widehat{CB_4} = C_4B_4$$

از روی شکل :

$$\tan\beta = \frac{C_4B_4}{R_{BQ}} = \frac{R_{BQ}(\alpha+\beta)}{R_{BQ}} \Rightarrow$$

$$\tan\beta = \alpha+\beta \Rightarrow \boxed{\alpha = \tan\beta - \beta = Inv(\beta)}$$

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

Unit VI

Gear Tooth Technology:

objective 1:

1. Base circale: (دایره مبنا)

عبارت است از دایره ای فرضی روی چرخدنده که منحنی involute

دندانه ها از روی آن ساخته شده است.

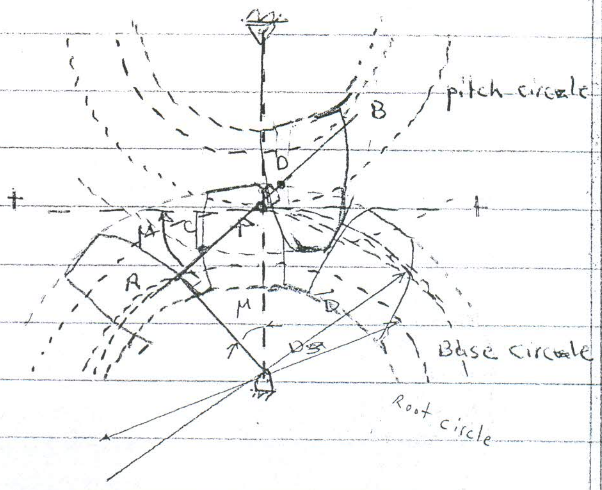
2. Pitch circale

عبارت است از دایره ی معادل یک دیسک

به طوری که دو چرخدنده ی درگیر دایره های گام شان

با یکدیگر مماس باشند این دایره روی چرخدنده

فرضی می باشد



3. Root circale

عبارت است از دایره ای فرضی روی چرخدنده که از انتهای ریشه ها می گذرد

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

4. Addendum circle

عبارت است از دایره فرضی روی چرخدنده که از ابتدای ریشه‌ها می‌گذرد

5. Pitch point

عبارت است از نقطه تماس دوایر Pitch circle.

6. Addendum (سردنده یا)

عبارت است از سردنده یا فاصله بین دوایر Addendum و Pitch از یک دندانه

7. Deddendum

عبارت است از ته دنده یا فاصله بین دوایر Pitch و root از دندانه

8. clearance

عبارت است از فاصله شعاعی بین دایره Addendum یک چرخدنده تا دایره root چرخدنده درگیر

9. working Depth

عبارت است از عمق عمل یا فاصله شعاعی بین دوایر Addendum دو چرخدنده درگیر یا برابر است

Addendum + Deddendum منهای clearance.

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

10. Tooth Face

عبارت است قسمتی از سطح دندانه که دارای منحنی involute می باشد. این قسمت کمتر است بین دایره Base و Addendum

11. Tooth thickness

عبارت است از ضخامت طول قوس روی دایره pitch از یک سطح دندانه تا نقطه ی مقابل دندانه یا طول قوس بین دو pitch point از دندانه

12. Tooth flank

عبارت است از قسمتی از دندانه که دارای منحنی involute نمی باشد و این قسمت کمتر بین دایره Base و root یک چرخدنده است

13. line of action

۱. مماس مشترک دو دایره Base است
۲. ~~[illegible]~~ مکان هندسی نقاط تماس بین دو چرخدنده ی درگیر روی این خط قرار دارد
۳. در نقطه ی تماس بین دو دندانه عمود بر profile منحنی های involute است
۴. امتداد نیروی انتقالی بین دو چرخدنده ی درگیر روی این خط قرار می گیرد
۵. از pitch point می گذرد

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

14. Pressure angle

عبارت است از زاویه بین خط عمل و مماس مشترک بین دو دایره Pitch . توجه می‌شود که امتداد نیروی انتقالی بین دو چرخ دنده درگیر روی خط عمل می‌باشد.

15. circular pitch

عبارت است از طول قوس روی دایره گام از یک نقطه روی یک دندانه تا نقطه نظیر روی دندانه دیگر

$$P_c = \frac{\pi D}{N}$$

N: تعداد دندانه‌ها

16. Base pitch

عبارت است از طول قوس روی دایره Base از یک نقطه روی یک دندانه تا نقطه نظیر روی دندانه دیگر

$$P_B = \frac{\pi D_B}{N}$$

D_B: قطر دایره Base

از روی شکل داریم:

$$R_B = R_P \cos\mu$$

$$R_B = \frac{\pi D_B}{N} = \frac{\pi D \cos\mu}{N} \Rightarrow P_B = P_c \cos\mu$$

17. Diametral pitch

بنابر تعریف عبارت است از عددی که برای استاندارد کردن چرخ دنده‌ها از آن استفاده می‌شود و برابر

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

$$P_D = \frac{N}{D}$$ است یعنی:

$$P_D = \frac{1}{m_o}$$

که مدول عبارت است از استاندارد چرخ دنده ها در استاندارد اروپایی یا آمریکائی

قانون اول: دو چرخ دنده درگیر باید دارای Diametral pitch یکسان باشند

اگر از چرخ دنده بالایی یک دنده رد شود از پایینی هم باید یک دنده رد شود پس باید P_c های آن ها مساوی باشد

بنابراین:

$$P_{c_1} = P_{c_2} \Rightarrow \frac{\pi D_1}{N_1} = \frac{\pi D_2}{N_2} \Rightarrow \frac{D_1}{N_1} = \frac{D_2}{N_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P_{D_1}} = \frac{1}{P_{D_2}} \Rightarrow P_{D_1} = P_{D_2}$$ قانون درگیری چرخ دنده

از تعریف circular pitch داریم:

$$P_c = \frac{\pi D}{N} = \frac{\pi}{N/D} = \frac{\pi}{P_D} \Rightarrow P_c P_D = \pi$$

18. Angle of action

عبارت است از زاویه ی مرکزی روی چرخ دنده بین نقطه ی شروع و نقطه ی خاتمه درگیری بین دو چرخ دنده درگیر.

اگر شعاع دایره گام دو چرخ دنده درگیر مساوی نباشد، زاویه درگیری بین دو چرخ دنده درگیر با هم متفاوت است

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

19. Pitch angle

عبارت است از زاویه‌ی مرکزی circular pitch درصورتی که pitch angle زیاد شود نیروی بیشتری منتقل می‌کند.

20. Interfrence

عبارت است از شرایطی که یک سطح اینولوت با یک سطح غیر اینولوت بین دو چرخ دنده درگیر تماس حاصل کند.

این شرایط در جعبه دنده‌های نو و کارکرده به صورت زیر اتفاق می‌افتد:

۱. جعبه دنده‌های نو: چنانچه در جعبه دنده‌های نو در حین کارکرد روغن جعبه دنده گرم شود، سروصدا در حین کارکرد بوجود آید، جعبه دنده ارتعاش نماید و در نهایت جعبه دنده قفل کند عامل آن تداخل بین چرخ دنده‌ها می‌باشد.

اگر از دقت تراش چرخ دنده اطمینان وجود دارد باید استحکام حفظ محور چرخ دنده‌ها را چک نمود چون ممکن است در حین انتقال قدرت زیاد تماس در سمت Flank برقرار شده باشد.

۲. جعبه دنده‌های کارکرده: این نوع جعبه دنده‌ها در مدت زمانی بدون هیچ یک از مشکلات ذکر شده کار کرده‌اند. تداخل بصورت گرم شدن روغن جعبه دنده خود را نشان می‌دهد.

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

21. Undercut

چنانچه بنابر نصب غلط چرخ دنده‌ها در داخل جعبه دنده، تماس در سمت Flank برقرار شود می‌توان سطح دندانه این دایره‌ی Base دایره root تراش داد به طوری که تماس از بین می‌رود این عمل را undercut می‌گویند که باعث تضعیف استحکام خمشی دنده‌ها می‌گردد

22. Contact Ratio

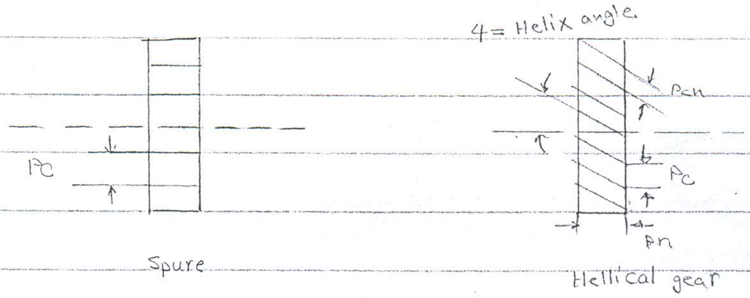
بنا به تعریف نسبت تماس عبارت است از تعداد دندانه درگیر بین دو چرخ دنده‌ی درگیر

$$CR = \frac{\text{Angel of action}}{\text{Pitch angle}} = \frac{CD}{P_c \cos\phi}$$

اثبات در امتحان

23. path of Contact = CD

عبارت است از بخشی از خط عمل که مکان هندسی و اتفاق نقاط تماس بین دو چرخ دنده درگیر باشد. این قسمت بخشی از خط عمل محصور بین دو دایر Addendum دو چرخ دنده‌ی درگیر است.



$P_c P_D = \pi$

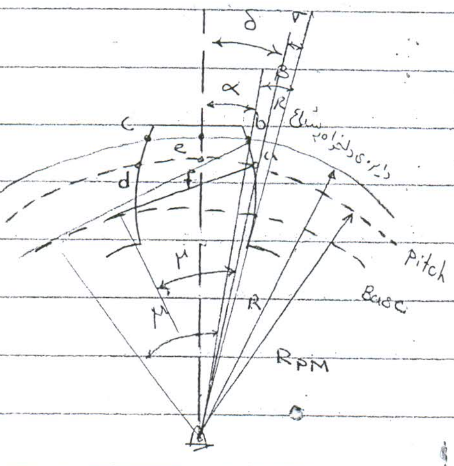
$P_{cn} P_{DN} = \pi$

55

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

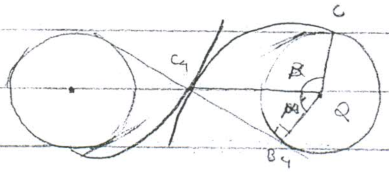
محاسبه‌ی ضخامت دندانه در شعاع دلخواه R :



$$\alpha = \widehat{eMb} = \frac{t_{bc}}{2R}$$

$$\delta = \widehat{fMa} = \frac{t_{ad}}{2R_{PM}}$$

حال از تعریف منحنی involute استفاده می‌کنیم



$$\beta = Inv\mu'$$

$$\beta = Inv\mu' = \tan\mu' - \mu'$$

$$\gamma = Inv\mu = \tan\mu - \mu$$

حال از روی شکل داریم :

$$\alpha + \beta = \delta + \gamma \Rightarrow \frac{t_{bc}}{2R} + Inv\mu' = \frac{t_{ad}}{2R_{PM}} + Inv\mu$$

https://t.me/MechSource

شورای صنفی دانشکده

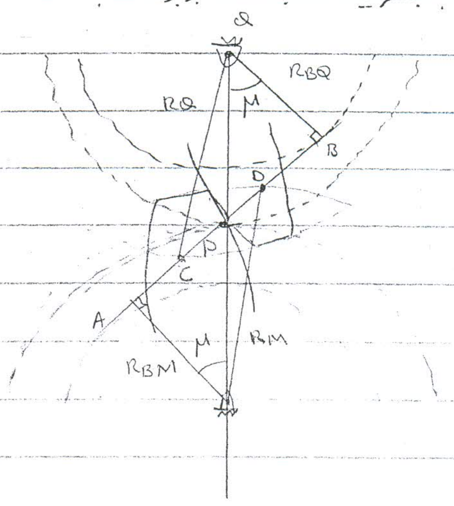
$$t_{bc} = 2R\left(\frac{tad}{2R_{PM}} + Inv\mu - Inv\mu'\right)$$

ضخامت دندانه در شعاع R .

Part II محاسبه نسبت تماس :

بنا به تعریف نسبت تماس برابر است با :

$$CR = \frac{\text{Angle of action}}{\text{pitch angle}}$$



$$\theta = \frac{CD}{P_C \cos\mu}$$

$$CD = CP + PD$$

$$CP = BC - BP$$

از روی شکل داریم :

$$BC^2 = R_Q^2 - R_{BQ}^2$$

$$BP = R_{PQ}\sin\mu$$

$$PD = AD - AP$$

$$AD^2 = R_M^2 - R_{BM}^2$$

$$AP = R_{PM}\sin\mu$$

Path of contact $= CD = (BC - BP) + (AD - AP)$

$$CD = \sqrt{R_Q^2 + R_{BQ}^2} + \sqrt{R_M^2 - R_{BM}^2} - (R_{PQ} + R_{PM})\sin\mu$$

https://t.me/MechSource

(Add: شعاع دوایر — Base — Pitch)

$$CR = \frac{\sqrt{R_Q^2 - R_{BQ}^2} + \sqrt{R_M^2 - R_{BM}^2} - (R_{PQ} + R_{PM})\sin\mu}{P_C \cos\mu}$$

با استفاده از استاندارد R_Q و R_M بدست می‌آید به عنوان مثال برای چرخ دنده‌ی 20°

(شعاع دوایر Addendum — شعاع دوایر Pitch)

$$R_M = R_{PM} + \frac{1}{P_D}$$ دایره Full Depth :

$$R_Q = R_{PQ} + \frac{1}{P_D}$$

objective 3: تعیین شرایط تداخل

قبل از ساخت یک جفت چرخ دنده درگیری توان چک نمود که آیا در چرخ دنده بعد از ساخت تداخل خواهند

داشتن یا خیر اطلاعات مورد نیاز عبارتند از :

N_1

N_2

μ

$$P_D = \frac{N}{D}$$

با داشتن مقادیر فوق :

$$P_D = \frac{N_1}{D_1} = \frac{N_2}{D_2}$$

لذا

$$2 \times R_{PM} = D_1 = \frac{N_1}{P_D} \qquad D_2 = \frac{N_2}{P_D} = R_{PQ} \times 2$$

و فاصله‌ی بین دو مرکز

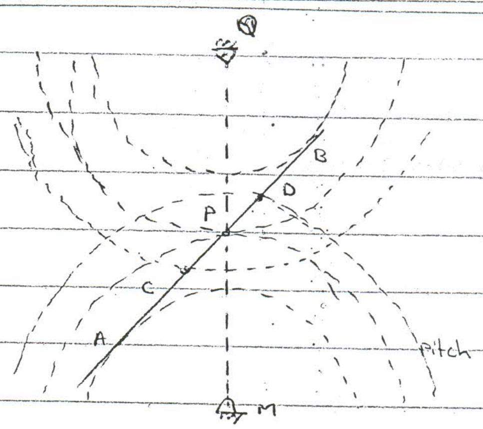
$$C = R_{PM} + R_{PQ} = MQ$$

شعاع دایره Base

$$R_{BQ} = R_{PQ}\cos\mu \qquad R_{BM} = R_{PM}\cos\mu$$

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource



با رسم دوایر Base ، مماس های آن ها خط عمل AB رسم می شود

با رسم شعاع دوایر Addendum

$$R_M = R_{PM} + \frac{1}{P_D}$$

$$R_Q = R_{PQ} + \frac{1}{P_D}$$

بوسیله path of contact (CD) بدست می آید

اگر چنانچه نقاط C و D بین نقاط A و B قرار گیرند تداخل نخواهیم داشت

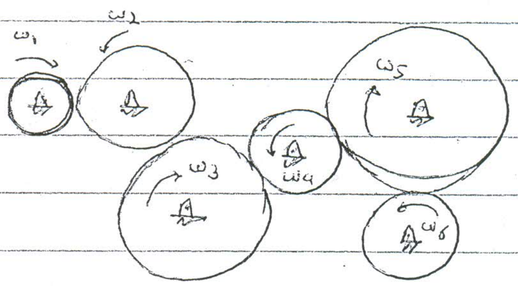
59

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

Unit VII Design of Gear Train

1. Simple Gear Train



بنابر تعریف نسبت سرعت در جعبه دنده برابر است با:

$$SR = \frac{\omega_6}{\omega_1}$$

$$\frac{\omega_6}{\omega_1} = \frac{\omega_6}{\omega_5} \cdot \frac{\omega_5}{\omega_4} \cdot \frac{\omega_4}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

چون سرعت خطی بین چرخ دنده‌ها یکسان است لذا:

$$R_1\omega_1 = R_2\omega_2 = \dots$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

لذا از روابط بالا داریم:

$$SR = \frac{R_5}{R_6} \times \frac{R_4}{R_5} \times \frac{R_3}{R_4} \times \frac{R_2}{R_3} \times \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \boxed{SR = \frac{\omega_6}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_6}}$$

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

چون طبق قانون درگیری بین دو چرخ دنده باید Diametral pitch یکسان باشد:

$$P_D = \frac{N}{D} = \frac{N}{2R} = \frac{N_1}{2R_1} = \frac{N_2}{2R_2} = \frac{N_3}{2R_3} = \dots = \frac{N_6}{2R_6}$$

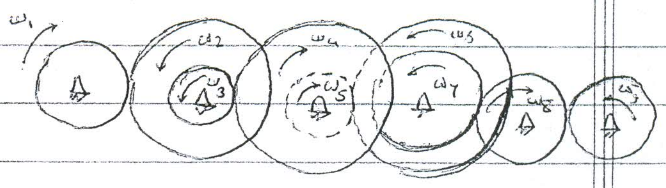
حال داریم:

$$\frac{R_1}{R_6} = \frac{N_1}{N_6}$$

لذا:

$$SR = \frac{\omega_6}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_6} = \frac{N_1}{N_6}$$

2. Compound Gear Train



بنابراین نسبت جعبه دنده برابر است با

$$SR = \frac{\omega_9}{\omega_1}$$

$$SR = \frac{\omega_9}{\omega_8} \cdot \frac{\omega_8}{\omega_7} \cdot \frac{\omega_7}{\omega_6} \cdot \frac{\omega_6}{\omega_5} \cdot \frac{\omega_5}{\omega_4} \cdot \frac{\omega_4}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

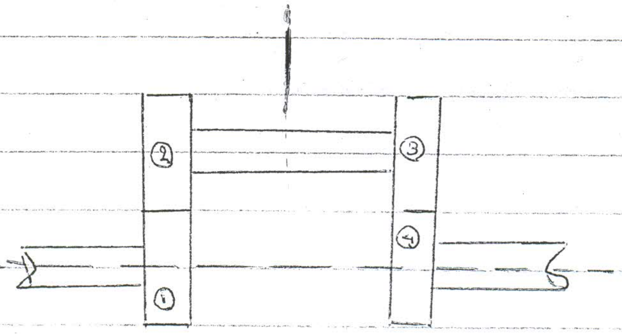
$$SR = \frac{\omega_9}{\omega_1} = \frac{\omega_9}{\omega_7} \cdot \frac{\omega_6}{\omega_5} \cdot \frac{\omega_4}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$$SR = \frac{\omega_9}{\omega_1} = \frac{R_7}{R_9} \cdot \frac{R_5}{R_6} \cdot \frac{R_3}{R_4} \cdot \frac{R_1}{R_2}$$

لذا حال داریم:

$$SR = \frac{\omega_9}{\omega_1} = \frac{\text{Driver حاصلضرب شعاع دوایر گام چرخ دنده های}}{\text{Driven حاصلضرب شعاع دوایر گام چرخ دنده های}}$$

3. Inverted Compound Gear Train



بنابراین نسبت سرعت ها برابراست با:

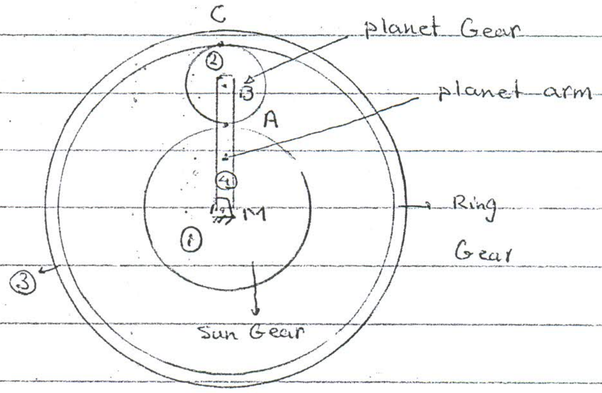
$$SR = \frac{\omega_4}{\omega_1}$$

$$SR = \frac{\omega_4}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1} \Rightarrow SR = \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{\omega_4 \omega_2}{\omega_3 \omega_1}$$

$$SR = \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{R_3 R_1}{R_4 R_2}$$

https://t.me/MechSource

4. Planatary Gear Train



$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}$ | : Planet ازروی شکل روی

$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{C/B}$ | : Planet ازروی شکل روی

$\vec{V}_{C/B} = -\vec{V}_{A/B}$ * ۲م

لذاداریم :

$\vec{V}_{C/B} \equiv \vec{V}_C - \vec{V}_B$

$\vec{V}_{A/B} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$

$\vec{V}_C - \vec{V}_B = \vec{V}_B - \vec{V}_A$

قدرمطلق :

$V_C = R_3 \omega_3$ روی Ring

$V_B = (R_1 + R_2)\,\omega_4$ روی Planet arm

https://t.me/MechSource

$V_A = R_1 \omega_1$ Sun روی

$$R_3 \omega_3 - (R_1 + R_2)\omega_4 = -R_1 \omega_1 + (R_1 + R_2)\omega_4$$

$$\Rightarrow \boxed{R_1 \omega_1 + R_3 \omega_3 = 2(R_1 + R_2)\omega_4}$$

سه حالت در نظر می‌گیریم:

1. Sun Gear is fixed : $\omega_1 = 0$
   input : planet arm
   output : Ring

$$\boxed{SR = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{2(R_1 + R_2)}{R_3}}$$

2. Planet arm is fixed : $\omega_4 = 0$
   input : Sun
   output : Ring

$$\boxed{SR = \frac{\omega_3}{\omega_1} = -\frac{R_1}{R_3}}$$ Reverse gear

3. Ring is fixed : $\omega_3 = 0$
   input : Sun
   output : planet arm

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

$$SR = \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{R_1}{2(R_1 + R_2)}$$

https://t.me/MechSource

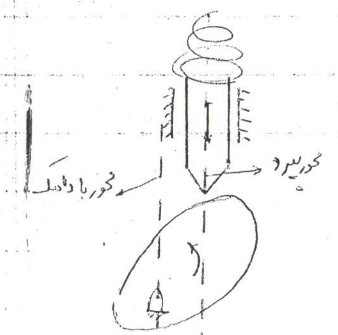
Unit VIII: Cams and Followers

دارای سه سیستم است :

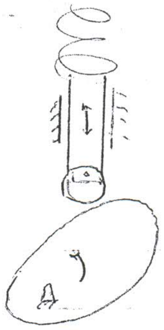
1. Cams
2. Followers
3. Motion programs

انواع پیرو (Followers) :

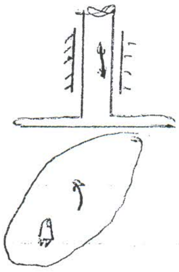
اگر سرعت بالا باشد پدیده‌ی Jam اتفاق می‌افتد و بادامک از کار می‌افتد



Knifel edge Followers

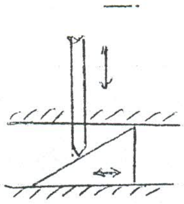


Roller Follower

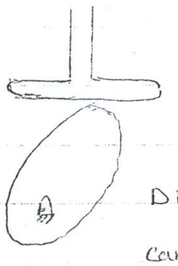


Flat Face Follower

انواع بادامک ها :

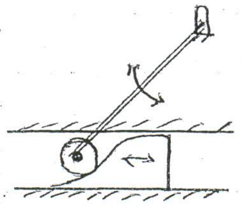


wedge cam



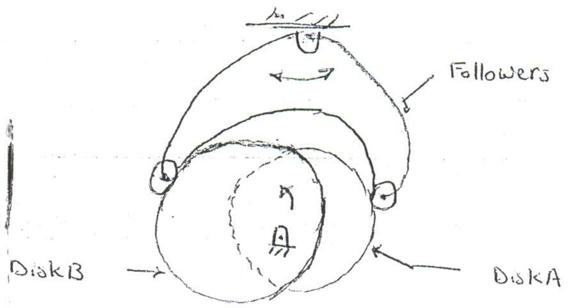
Disk cam

https://t.me/MechSource

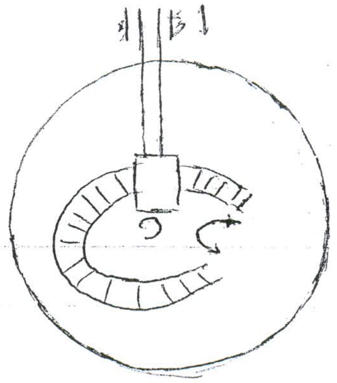


wedge
cam with oscllating followers

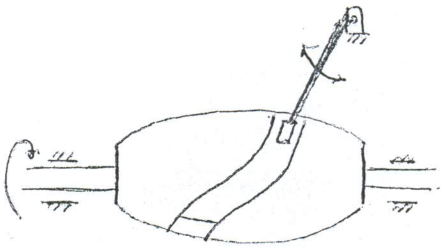
اگر سرعت دورانی بادامک بسیار زیاد باشد از این نوع بادامک استفاده می‌شود.



Conjugate
Cam



Spiral cam
with translating
Follwers



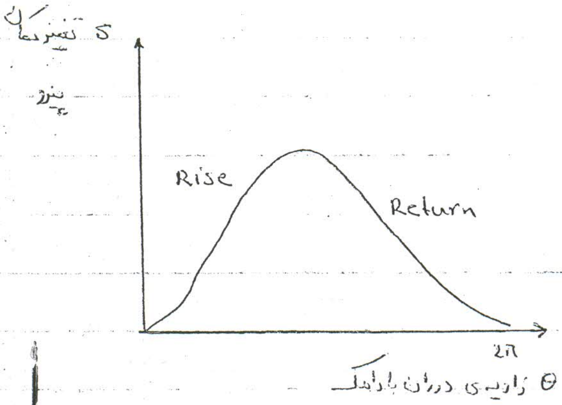
globoidal
cam

https://t.me/MechSource

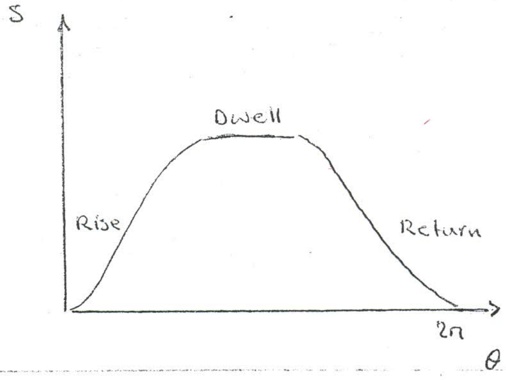
https://t.me/MechSource

انواع Motion program :

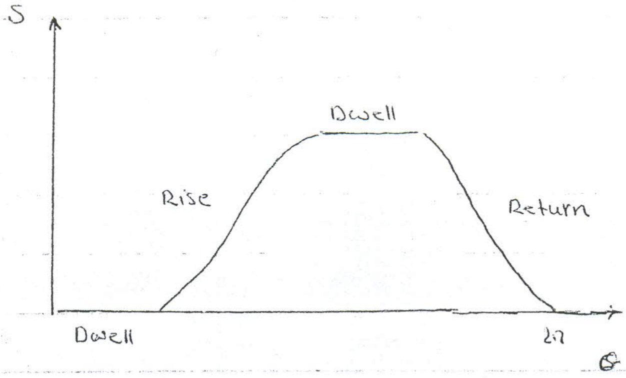
برنامه‌ای که باید بادامک حرکت را به پیرو منتقل کند



R_R Motion program



R_D_R Motion program



D_R_D_R Motion program

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

objective 3:

نحوه ساخت کانتور بادامک با داشتن Motion programe سیستم پیرو

فرض کنید سیستم بادامک و پیرو معلوم است. با داشتن Motion p می‌توان کانتور بادامک را رسم و آن را

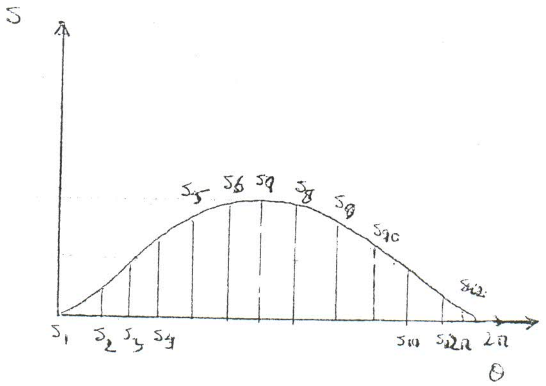
در کارگاه ساخت.

مثال:

فرض کنید بادامک از نوع دیسک و پیرو از نوع Roller Follower و Translating و هم مرکز با مرکز

بادامک می‌باشند.

Motion program مطابق شکل زیر داده شده است.



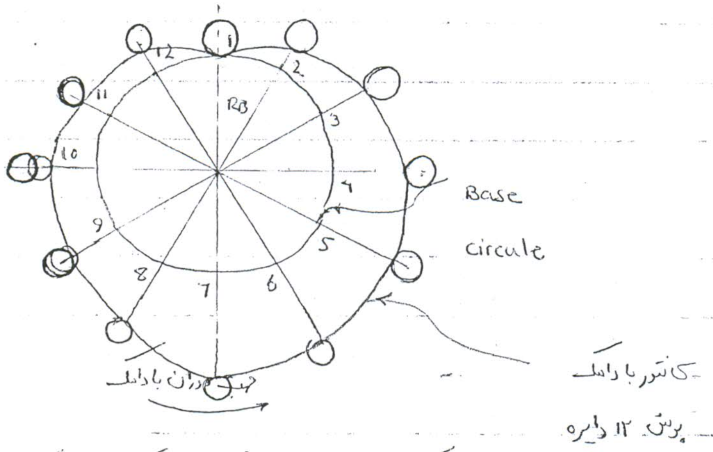
۱- ابتدا دایره‌ی Base بادامک را تعیین می‌کنیم و شعاع آن را R_B می‌نامیم.

۲- Motion program را به تعداد قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم (12 قسمت) و ارتفاع هر قسمت را

S_i می‌نامیم.

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource



۳- دایره‌ی Base را به همان تعداد تقسیم می‌کنیم و در خلاف جهت حرکت بادامک شماره گذاری می‌کنیم.

۴- موقعیت Roller پیرو را در ۱۲ قسمت روی دایره‌ی Base از فرمول زیر مشخص نموده و دایره‌ی پیرو را مشخص می‌کنیم:

$$r_i = R_B + S_i + r_f$$

r_f برابر با شعاع پیرو یعنی شعاع Roller آن است برای این منظور ابتدا باید Min شعاع انحنا Mp را محاسبه نموده و r_f را طوری انتخاب نمود که کوچکتر از Min شعاع انحنا Mp باشد.

۵- پوش ۱۲ دایره Roller، کانتور بادامک است.

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

Unit IX Motion Programs

اگر S تغییر مکان پیرو ، θ زاویه دوران بادامک داریم :

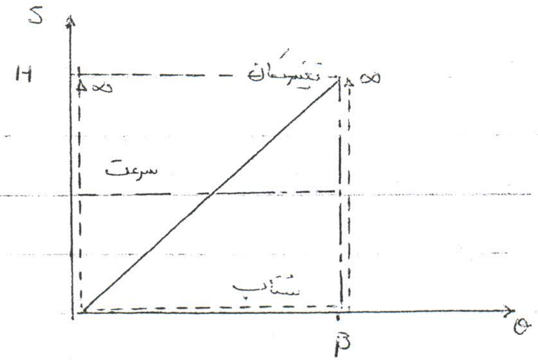
$$V = \frac{ds}{dt} = \text{سرعت پیرو}$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \text{شتاب پیرو}$$

$$J = \frac{d^3s}{dt^3} = \text{تکان (jerk)}$$

هرچه jerk یک سیستم را min کنیم آن سیستم comfort تری باشد

1 - Constant velocity Motion programs



در ابتدا و انتها شتاب بی‌نهایت است .

$S = C\theta$ معادله تغییر مکان

$\theta = \beta$

$S = H$

$$\Rightarrow H = C\beta \Rightarrow C = \frac{H}{\beta} \Rightarrow \boxed{S = H\frac{\theta}{\beta}}$$ تغییر مکان

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

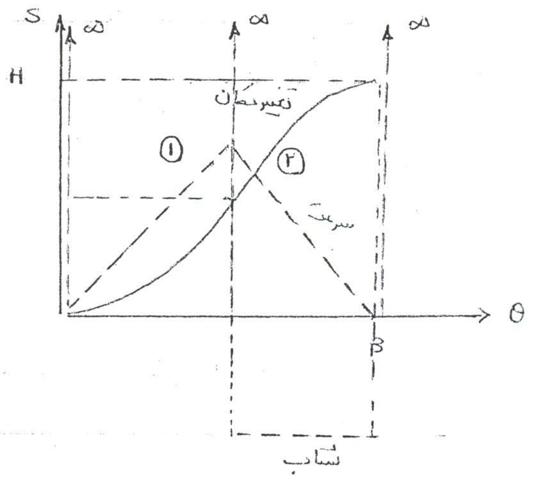
$$V = \frac{ds}{dt} = H\frac{\omega}{\beta}$$ سرعت

$$a = 0$$

این سیستم به علت این که در ابتدا و انتهای Rise شتاب بی‌نهایت است با توجه به جرم پیرو نیروی بی‌نهایت

به پیرو منتقل شده که غیر قابل قبول است برای سرعت های بالا .

2. Constant accelration Motion program.



در سه نقطه جرک بی‌نهایت داریم .

$$S = C\theta^2 \qquad 0 \leq \theta \leq \beta/2$$

$$\theta = \beta/2$$

$$S = H/2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{H}{2} = C\beta^2 \Rightarrow C = \frac{2H}{\beta^2} \Rightarrow \boxed{S = 2H\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2}$$

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

$V = \frac{4H}{\beta^2} \omega\theta$ سرعت

$a = \frac{4H}{\beta^2} \omega^2$

$S = C_1\theta^2 + C_2\theta + C_3 \qquad \beta/2 \leq \theta \leq \beta$

$\theta = \beta \qquad \theta = \beta \qquad \theta = \beta/2$

$S = H \qquad V = 0 \qquad V_2 = V_1$

$C_1 = \frac{-2H}{\beta^2} \qquad C_2 = \frac{4H}{\beta} \qquad C_3 = -H$

$$S = H\left[1 - 2\left(1 - \frac{\theta}{\beta}\right)^2\right]$$

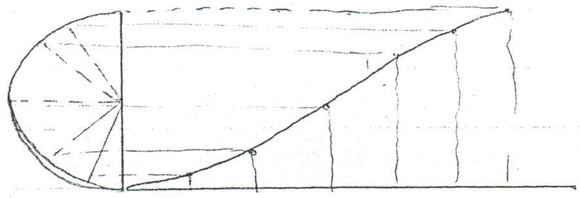
$$V = \frac{ds}{dt} = 4H\omega/\beta \left[1 - \theta/\beta\right]$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{-4H\omega^2}{\beta^2}$$

این سیستم نیز برای شتاب های کم قابل استفاده است.

3. Simple Harmonic Motion program..

معادله منحنی هارمونیک ساده



$S = C(1 - \cos\varphi)$

$\varphi = \frac{\pi\theta}{\beta} \qquad C = \frac{H}{2}$

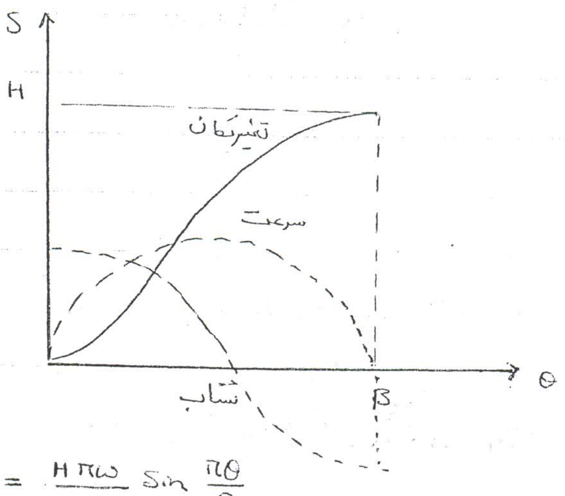
15

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

برای حرکت با دامنک دیرد

$$S = \frac{H}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi\theta}{\beta}\right) \qquad \text{تغییر مکان}$$



$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{H\pi\omega}{2\beta}\sin\frac{\pi\theta}{\beta}$$

$$a = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{H}{2}\left(\frac{\pi\omega}{\beta}\right)^2\cos\frac{\pi\theta}{\beta}$$

4- Modified harmonic Motion programs.

$$S = \frac{H}{2}\left[\left(1 - \cos\frac{\pi\theta}{\beta}\right) - \frac{1}{4}\left(1 - \cos\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)\right]$$

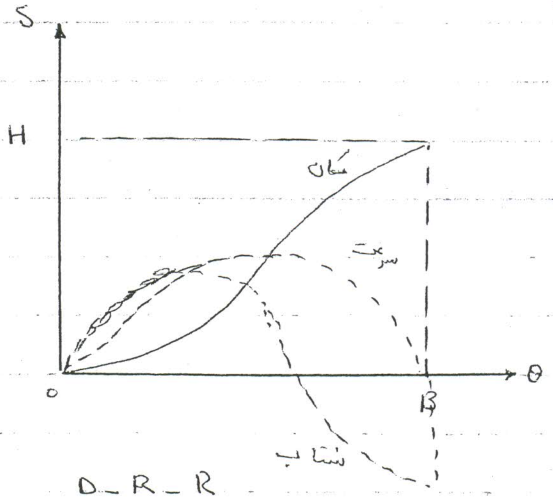
$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{H\pi\omega}{2\beta}\left(\sin\frac{\pi\theta}{\beta} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)$$

$$a = \frac{H}{2}\left(\frac{\pi\omega}{\beta}\right)^2\left(\cos\frac{\pi\theta}{\beta} - \cos\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)$$

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

شورای صنفی دانشکده مکانیک



D_R_R

در این جا نه سرعت نه شتاب نه جرک هیچکدام بی‌نهایت نیست.

5. polynomical Motion programs

شرایط مورد نیاز:

$\theta = 0 \quad \theta = 0 \quad \theta = 0$

$S = 0 \quad V = 0 \quad a = 0$

$\theta = \beta \quad \theta = \beta \quad \theta = \beta$

$S = H \quad V = 0 \quad a = 0$

$$S = D_0 + D_1\theta + D_2\theta^2 + D_3\theta^3 + D_4\theta^4 + D_5\theta^5$$

$$V = D_1\omega + 2D_2\omega\theta + 3D_3\theta^2\omega + 4D_4\theta^3\omega + 5D_5\theta^4\omega$$

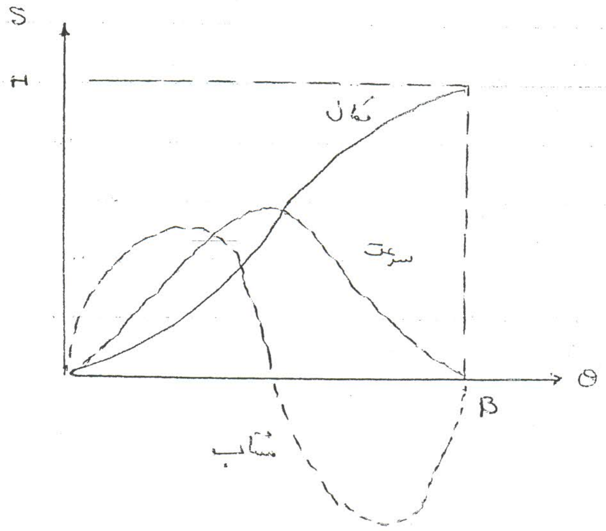
۲۲ $$a = \underline{D_1} + 2D_2\omega^2 + 6D_3\omega^2\theta + 12D_4\omega^2\theta^2 + 20D_5\omega^2\theta^3$$

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

$$\left.\begin{matrix}\theta = 0 \\ S = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow D_0 = 0 \qquad \left.\begin{matrix}\theta = 0 \\ V = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow D_1 = 0 \qquad \left.\begin{matrix}\theta = 0 \\ a = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow D_2 = 0$$

$$D_3 = \frac{10H}{\beta^3} \qquad D_4 = -15\frac{H}{\beta^4} \qquad D_5 = \frac{6H}{\beta^5}$$



https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

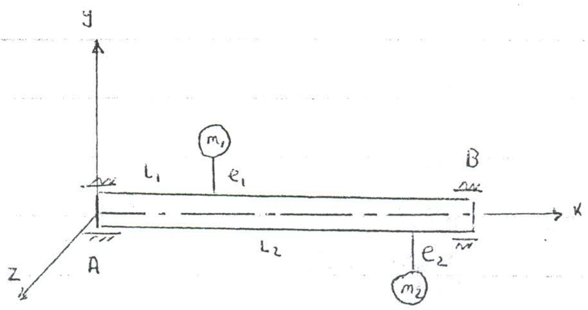
Balancing of Rotating shafts

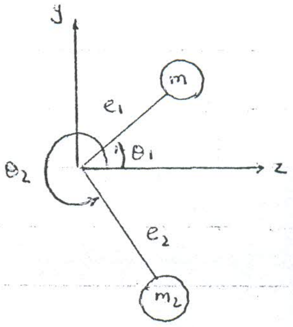
تعادل استاتیکی و دینامیکی در محورها:

تعادل استاتیکی حول محور ساکن زمانی اتفاق می افتد که نیروهای گریز از مرکز معادل حاصل از خود را خنثی کند.

فرض کنید محور دوار AB که روی دو یاتاقان A و B قرار دارد، دارای تعدادی جرم خارج از مرکز در فواصل مختلف می باشد. به عنوان مثال فرض کنید محور دارای دو جرم خارج از مرکز $(m_1, e_1, l_1, \theta_1)$ و $(m_2, e_2, l_2, \theta_2)$ می باشد. در اثر دوران محور، عکس العمل نیروهای گریز از مرکز، جرم های خارج از مرکز روی یاتاقان های A و B ایجاد و دائماً خنثی نموده و دو یاتاقان را چنانچه متعادل ننمائیم از بین می برد.

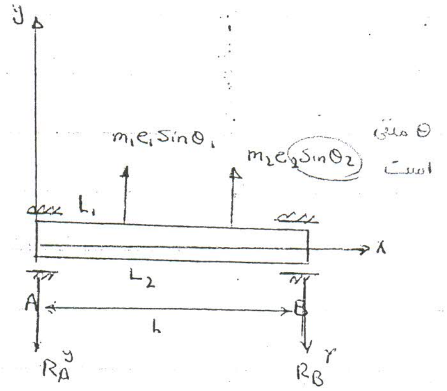
هدف: بالانس محور دوار فوق روی یاتاقان های A و B می باشد.

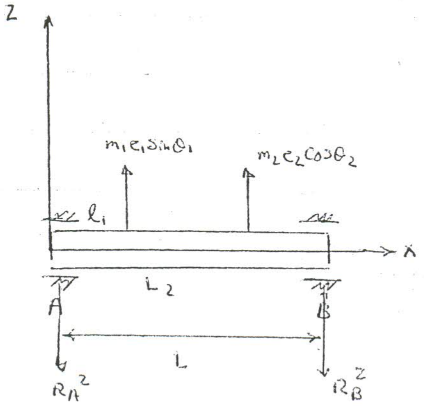




https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource





در صفحه x-y :

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -R_A^y + m_1e_1\sin\theta_1 + m_2e_2\sin\theta_2 - R_B^y = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow m_1e_1\sin\theta_1 l_1 + m_2e_2\sin\theta_2 l_2 - R_B^y l = 0$$

از دو معادله بالا R_A^y , R_B^y محاسبه می‌شود

در صفحه x-z :

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -R_A^z + m_1e_1\cos\theta_1 + m_2e_2\cos\theta_2 - R_B^z = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -m_1e_1\cos\theta_1 L_1 - m_2e_2\cos\theta_2 L_2 + R_B^z L = 0$$

https://t.me/MechSource

https://t.me/MechSource

از دو معادله‌ی قبل هم R_A^z , R_B^z محاسبه می‌شود

$$R_A = \sqrt{{R_A^y}^2 + {R_A^z}^2} = m_A e_A$$

$$\tan\theta_A = \frac{R_A^y}{R_A^z} \Rightarrow \theta_A = \tan^{-1}\frac{R_A^y}{R_A^z}$$

بنابراین: با اعمال جرم در محل یاتاقان A جرم و با زاویه‌ی مناسب در شعاع مناسب قرار می‌دهیم.

$$R_B = \sqrt{{R_B^y}^2 + {R_B^z}^2} = m_B e_B$$

$$\tan\theta_B = \frac{R_B^y}{R_B^z} \Rightarrow \theta_B = \tan^{-1}\frac{R_B^y}{R_B^z}$$

https://t.me/MechSource